<table>
<tr><td rowspan="4"></td><td>ALCALDÍA DE VILLAVICENCIO</td><td>FR-1540-GD01</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>INSTITUCIÓN EDUCATIVA CENTAUROS
Aprobación oficial No.0552 del 17 de septiembre del 2002
Nit. 822.002014-4
Código DANE 150001004630</td><td>Vigencia: 2020</td></tr>
<tr><td rowspan="2">APOYO A LA GESTION ACADEMICA</td><td>Documento controlado</td></tr>
<tr><td>Página 1 de 1</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Docente: Carlos Eduardo Sánchez Hueza</td><td>Área: Matemáticas</td></tr>
<tr><td>Grado: SEPTIMO</td><td>Sede: La Rosita</td><td>Fecha: Cuarto Periodo</td></tr>
<tr><td colspan="3">Estándar: Utiliza números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver y plantear problemas justificando procesos en contextos de medida, geométricos, numéricos, de construcción, estadísticos, digitales y de la matemática recreativa.</td></tr>
<tr><td colspan="3">DBA: Resuelve problemas que involucran números racionales positivos (fracciones, decimales o números mixtos) en diversos contextos haciendo uso de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación. Predice el resultado de rotar, reflejar, trasladar una figura. Plantea y soluciona problemas del entorno usando ángulos y triángulos.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Nombre del estudiante:</td></tr>
</table>

ACTIVIDAD #1:

LA LINEA RECTA

PAGINAS 164 – 165 - 166

Debes escribir en tu cuaderno las páginas **164 - 165,** teniendo cuidado de consignar todos los ejemplos que aparecen allí resueltos. Además, debes realizar las actividades de aprendizaje de la página **166.**

ACTIVIDAD #2:

CONICAS

PÁGINAS 172 - 173

Debes escribir en tu cuaderno la página **172**; analizando detenidamente su contenido. Escribe y analiza todos los ejemplos que aparecen. Además, realizar las actividades de aprendizaje de la página **173.**

ACTIVIDAD #3:

CIRCUNFERENCIA

PÁGINAS 174 - 175

Consigna en tu cuaderno la página **174**. Escribe los ejemplos que aparecen allí resueltos. Finalmente resuelve las actividades de aprendizaje de la página **175.**

2 La línea recta

Saberes previos

Diana paga $ 100 por cada minuto de llamada a celular. ¿Cuánto paga por una llamada de 3 minutos? ¿Cuánto paga por una llamada de 5 minutos? ¿Cuántos minutos duró una llamada por la que pagó $ 1 200?

Analiza

El costo del servicio de gas natural de un hogar en estrato 3 lo determina el valor de los metros cúbicos consumidos más un cargo fijo de $ 2 739.

- Si el valor de 1 m³ es de $ 1 227,75, ¿cuál es la expresión algebraica que permite calcular la relación entre el consumo y el costo mensual de gas?

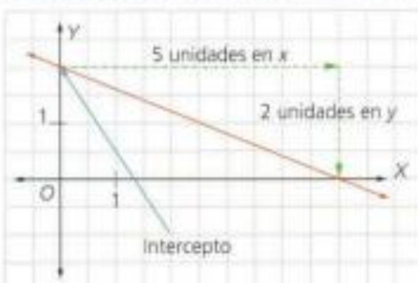


Figura 5.17

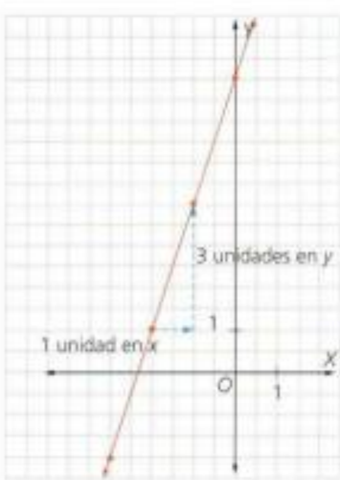


Figura 5.18

Conoce

El valor que se debe pagar por el servicio de gas natural se calcula mediante una relación lineal de la forma $y = mx + b$. En esta relación, y corresponde al valor del servicio, m al valor de un metro cúbico de gas, x a la cantidad de metros cúbicos consumidos y b al valor del cargo fijo. Como $m = 1227{,}75$ y $b = 2\,739$, se tiene que:

$$y = 1\,227{,}75x + 2\,739$$

Así, para un consumo de 3 m³, $x = 3$ y el valor a pagar está dado por:

$$y = 1\,227{,}75(3) + 2\,739 = 6\,422{,}25$$

2.1 Ecuación de la recta cuando se conocen la pendiente y el intercepto con el eje Y

La expresión $y = mx + b$ recibe el nombre de **ecuación cartesiana de la recta**, y es la expresión algebraica que relaciona las coordenadas (x, y) de los puntos P que pertenecen a la recta. En la anterior ecuación, m es la pendiente de la recta y b es el valor en el que la recta interseca al eje Y (intercepto).

Ejemplo 1

Para determinar la ecuación de una recta cuya pendiente (m) es $-\frac{2}{5}$ y el intercepto en Y (b) es 2, se reemplazan los valores m y b en la ecuación cartesiana.

$$y = mx + b \Rightarrow y = -\frac{2}{5}x + 2$$

Para representar la ecuación, se ubica el punto del intercepto en Y; es decir, $(0, 2)$ y se halla otro punto a partir de la pendiente: por cada 5 unidades que avanza x, y baja 2 unidades (Figura 5.17).

2.2 Ecuación de la recta cuando se conocen un punto y la pendiente

La expresión $m(x - x_1) = (y - y_1)$ se conoce como **ecuación de la recta** en la forma **punto-pendiente**, y se obtiene conociendo un punto $A(x_1, y_1)$ de la recta y la pendiente m de la misma.

Ejemplo 2

Para determinar la ecuación de la recta con pendiente $m = 3$ que pasa por el punto $(-3, -2)$, se reemplazan los valores en la ecuación punto-pendiente.

$$m(x - x_1) = (y - y_1)$$
$$3(x - (-3)) = (y - (-2))$$
$$3x + 9 = y + 2$$

Despejando y de la ecuación, se obtiene:

$$y = 3x + 7$$

Para representar la ecuación, se ubican el intercepto: $(0, 7)$ y la coordenada $(-3, -2)$. Luego se verifica gráficamente la pendiente (Figura 5.18).

Ejemplo 3

Para determinar la ecuación de la recta que pasa por el punto $\left(2, \sqrt{3}\right)$ cuya inclinación es 60°, se halla la pendiente utilizando la expresión $\tan 60° = \sqrt{3}$ y luego se reemplazan los valores en la ecuación punto-pendiente.

$$m(x - x_1) = (y - y_1)$$
$$\sqrt{3}(x - 2) = \left(y - \sqrt{3}\right)$$
$$\sqrt{3}x - 2\sqrt{3} = y - \sqrt{3}$$

Despejando y de la ecuación, se obtiene que:

$$y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$$

2.3 Ecuación de la recta cuando se conocen dos puntos

A fin de determinar la **ecuación de una recta cuando se conocen las coordenadas de dos puntos** que pertenecen a la misma, primero se halla la pendiente m y luego se utiliza la ecuación punto-pendiente.

Ejemplo 4

Para determinar la ecuación de la recta de la Figura 5.19 que pasa por los puntos $(3, -2)$ y $(-2, 1)$, se lleva a cabo el siguiente procedimiento.

- Se halla la pendiente.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-2)}{-2 - 3} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$$

- Se reemplazan los valores en la ecuación punto-pendiente.

$$m(x - x_1) = (y - y_1)$$
$$-\frac{3}{5}(x - 3) = (y - (-2))$$
$$-\frac{3}{5}x + \frac{9}{5} = y + 2$$
$$-\frac{3}{5}x + \frac{9}{5} - 2 = y$$
$$y = -\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}$$

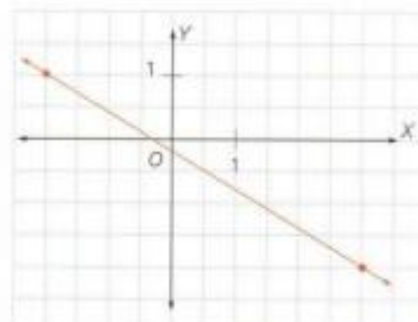


Figura 5.19

2.4 Ecuación general de la recta

La expresión $Ax + By + C = 0$, donde A, B y C son números reales, se denomina **ecuación general de la recta**.

Al despejar y de la ecuación general, es posible obtener la ecuación cartesiana de la recta.

$$Ax + By + C = 0$$
$$By = -Ax - C$$
$$y = -\frac{Ax}{B} - \frac{C}{B}$$

De esta manera se puede concluir que, dada una ecuación en su expresión general, la **pendiente** es $-\frac{A}{B}$ y el **intercepto en el eje Y** es $-\frac{C}{B}$, con $B \neq 0$.

2 La línea recta

Ejemplo 5

Para encontrar la pendiente y el punto de corte con el eje Y de una recta cuya ecuación está dada por $-2x + 3y + 2 = 0$, se despeja la variable y de la ecuación general, así:

$$-2x + 3y + 2 = 0$$
$$3y = 2x - 2$$
$$y = \frac{2x}{3} - \frac{2}{3}$$

Por tanto, se tiene que:

$m = \frac{2}{3}$ y $b = -\frac{2}{3}$

Ejemplo 6

Observa cómo se establece la ecuación general de la recta que pasa por los puntos (1, 1) y (3, 5).

Se halla la pendiente.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

Luego, se utiliza la ecuación punto-pendiente.

$$m(x - x_1) = (y - y_1)$$
$$2(x - 1) = (y - 1)$$
$$2x - 2 = y - 1$$
$$y = 2x - 1$$

Como $y = 2x - 1$, entonces $-2x + y + 1 = 0$.

Por tanto, la ecuación general de la recta es:

$$-2x + y + 1 = 0$$

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Representa las siguientes rectas a partir del punto de corte con el eje Y y la pendiente.

a. $y = 2x - 3$

b. $y = -0{,}5x + 1{,}5$

c. $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}$

d. $y = -x + 4$

Ejercitación

2 Halla la ecuación general de cada recta según las condiciones dadas.

a. Pendiente 2 y corte con el eje Y en -3.

b. Pendiente $-\frac{1}{2}$ y corte con Y en $-\frac{3}{5}$.

c. Inclinación 30° y corte con el eje Y en 1.

3 Halla la ecuación cartesiana de cada recta a partir de la pendiente y un punto de la misma.

a. $m = -2$ y $(1, 0)$

b. $m = 6$ y $\left(5, -\frac{2}{5}\right)$

c. $m = 14$ y $(-2, 1)$

d. $m = -0{,}75$ y $\left(\frac{1}{4}, 3\right)$

Comunicación

4 Observa las gráficas y escribe en tu cuaderno la ecuación cartesiana de cada recta.

a.

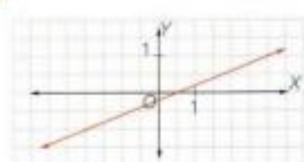


Figura 5.20

b.

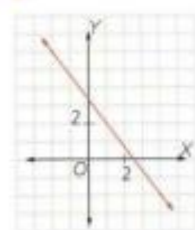


Figura 5.21

c.

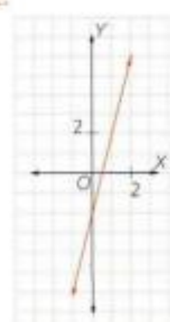


Figura 5.22

d.

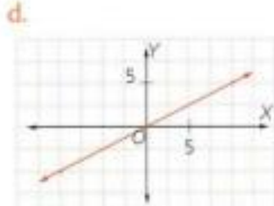


Figura 5.23

4 Secciones cónicas

Saberes previos

Describe las características de un cono.

Analiza

En la Figura 5.38, las rectas e y g son secantes.

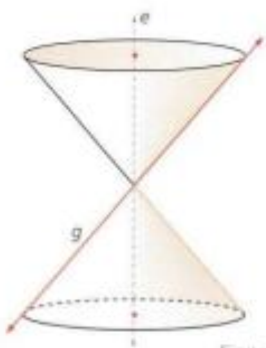


Figura 5.38

- ¿Cómo se obtiene la anterior figura a partir de las rectas e y g?

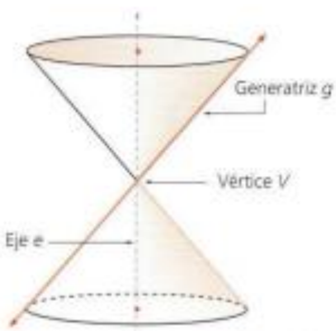


Figura 5.39

Conoce

La Figura 5.38 se puede obtener al hacer girar la recta g alrededor de la recta e.

Una **superficie cónica** es aquella que se obtiene al hacer girar una recta g (generatriz) alrededor de otra recta e (eje), cuando g y e son secantes (Figura 5.39). El punto de corte de las dos rectas se llama vértice V de la superficie.

Esta superficie está compuesta por dos conos adosados por el vértice y simétricos uno del otro con respecto al vértice.

Desde otro punto de vista, la superficie está formada por infinitas **generatrices** que pasan por V y forman el mismo ángulo con el eje (una de ellas es la recta g).

Al cortar la superficie cónica con un plano se obtienen unas secciones conocidas como **secciones cónicas**.

- Cuando el plano contiene al vértice, se obtienen las llamadas **cónicas degeneradas**. Según la relación que haya entre el ángulo α que forma la generatriz con el eje y el ángulo β que forma el plano con el eje (Tabla 5.1), se obtiene un punto, una recta o un par de rectas secantes.

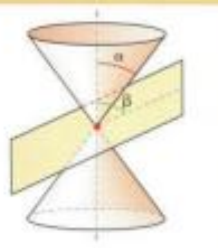
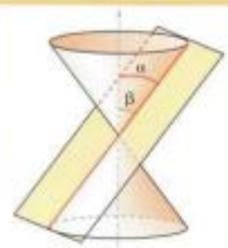
Un punto	Una recta	un par de rectas secantes
		
$\alpha < \beta$	$\alpha = \beta$	$\alpha > \beta$

Tabla 5.1

- Cuando el plano no contiene al vértice de la superficie, se obtienen **cónicas no degeneradas**. Se pueden dar los cuatro casos dados en la Tabla 5.2.

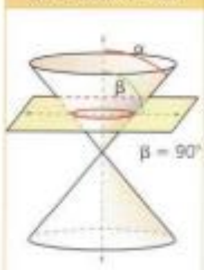
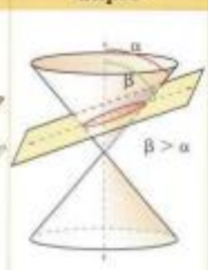
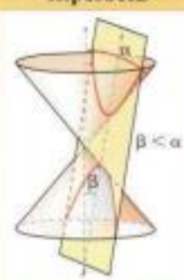
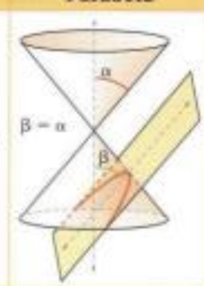
Circunferencia	Elipse	Hipérbola	Parábola
			
El plano secante es perpendicular al eje.	El plano secante forma con el eje un ángulo mayor que con las generatrices.	El plano secante forma con el eje un ángulo menor que con las generatrices y corta las dos hojas de la superficie cónica.	El plano secante es paralelo a una generatriz y corta solo una de las hojas de la superficie cónica.

Tabla 5.2

En la Tabla 5.2 se observa que para la circunferencia y la elipse, la cónica es una curva cerrada y corta todas las generatrices; para la hipérbola y la parábola, la cónica es una curva abierta y no corta todas las generatrices.

4.1 Ecuación general de segundo grado

La ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde A, B, C, D, E y F son números reales y A, B y C son diferentes de cero, se denomina **ecuación general de segundo grado** y permite determinar una sección cónica.

Si la cónica es no degenerada, de acuerdo con el signo de $B^2 - 4AC$ se puede establecer de qué tipo es.

- Si $B^2 - 4AC < 0$, se trata de una elipse.
- Si $B^2 - 4AC = 0$, la curva es una parábola.
- Si $B^2 - 4AC > 0$, es una hipérbola.

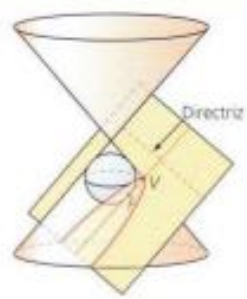
El número $B^2 - 4AC$ recibe el nombre de **discriminante** de la ecuación.

4.2 Elementos de las cónicas

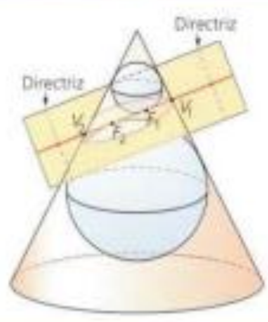
En la Tabla 5.3 se presentan los elementos de las cónicas.

- El **foco** F o los focos de una sección cónica son los puntos de tangencia del plano secante que genera la cónica con las esferas inscritas al cono, que son tangentes, a la vez, al plano.
- La **directriz** de una curva cónica es la recta de intersección del plano secante con el plano que contiene a la circunferencia de tangencia entre el cono y la esfera que, siendo tangente al plano secante, está inscrita en la circunferencia cónica.
- Dado un punto de la cónica, se llama **excentricidad** a la razón constante entre la distancia de dicho punto al foco y a la directriz correspondiente. La excentricidad de una parábola es igual a 1, la de una elipse es menor que 1; y, la de una hipérbola es mayor que 1.

Parábola



Elipse



Hipérbola

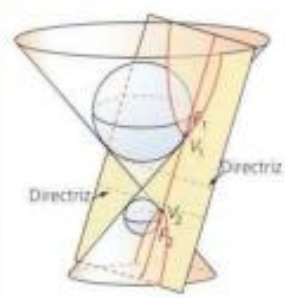


Tabla 5.3

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1. Usa el discriminante para determinar si la ecuación dada corresponde a una parábola, a una elipse o a una hipérbola.

   a. $x^2 + 2xy + y^2 + x - y = 0$

   b. $153x^2 + 192xy + 97y^2 = 225$

   c. $9x^2 - 24xy - 16y^2 = 100x - 100y - 100$

   d. $25x^2 - 120xy = -144y^2 + 156x + 65y$

   e. $53x^2 + 72xy + 73y^2 - 40x + 30y = 75$

Evaluación del aprendizaje

¿Es posible generar una parábola, una elipse o una hipérbola haciendo cortes en alguno de los siguientes sólidos? Explica cómo lo harías.

a.

Figura 5.40

b.

Figura 5.41

5 La circunferencia

Saberes previos

¿Cómo se puede calcular el perímetro de una circunferencia?

Analiza

Un patinador recorre todos los días una pista circular que tiene un diámetro de 50 m.

- ¿Cuántos metros recorre el patinador al dar una vuelta?

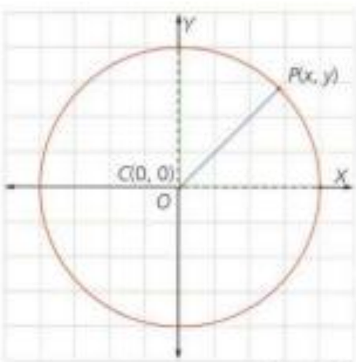


Figura 5.43

Conoce

Para conocer la cantidad de metros que recorre el patinador al dar una vuelta a la pista, se utiliza la expresión que permite calcular la longitud de una circunferencia, esto es $L_c = 2\pi r$.

Como el valor del diámetro corresponde a dos veces el valor del radio, entonces:

$$L_c = 2\pi(25 \text{ m}) = 157{,}08 \text{ m}$$

Por tanto, el patinador recorre 157,08 m al dar una vuelta a la pista.

Se llama **circunferencia** al lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a un punto fijo, denominado **centro**, es constante. A dicha distancia constante se le conoce como **radio**.

5.1 Elementos de la circunferencia

En la Figura 5.42 se representan los elementos de una circunferencia.

Figura 5.42

5.2 Ecuación canónica de la circunferencia con centro en (0, 0)

En una circunferencia con centro $C(0, 0)$, radio r y $P(x, y)$ un punto cualquiera sobre la circunferencia (Figura 5.43), se cumple que $d(C, P) = r$.

Si se utiliza la fórmula de la distancia, se tiene que:

$$d(C, P) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Al elevar al cuadrado ambos lados de la igualdad, se obtiene la **ecuación canónica de la circunferencia con centro en (0, 0)**.

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Ejemplo 1

El centro de la circunferencia que tiene por ecuación $x^2 + y^2 = 9$, es $(0, 0)$ y su radio r es 3, porque $3^2 = 9$.

Con estos datos en la Figura 5.44 se representa la circunferencia correspondiente.

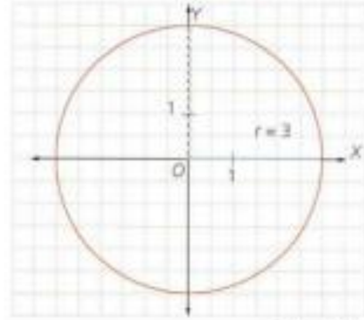


Figura 5.44

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejemplo 2

Si se quiere hallar la ecuación de la circunferencia representada en la Figura 5.45, primero se identifica que el centro de la circunferencia es (0, 0) y el valor del radio 4. Luego, se reemplazan estos valores en la ecuación canónica.

$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$x^2 + y^2 = 4^2$$
$$x^2 + y^2 = 16$$

La ecuación canónica de la circunferencia es $x^2 + y^2 = 16$.

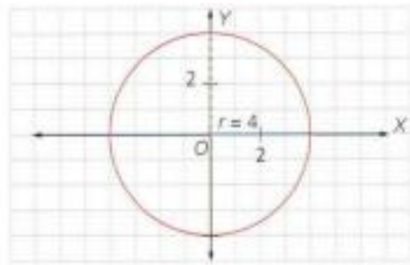


Figura 5.45

Ejemplo 3

Para comprobar que $P(-3, 4)$ pertenece a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 25$, se reemplaza la coordenada (x, y) en la ecuación canónica por las coordenadas de P y se verifica que se cumpla la igualdad.

$$x^2 + y^2 = (-3)^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

Como al reemplazar la coordenada del punto P en la ecuación se satisface la igualdad, entonces el punto pertenece a la circunferencia.

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1. Representa cada circunferencia en el plano.
   a. $x^2 + y^2 = 81$
   b. $x^2 = -y^2 + 4$
   c. $x^2 + y^2 = 2$
   d. $x^2 + y^2 = \frac{4}{9}$

Ejercitación

2. Halla la ecuación canónica de cada circunferencia de acuerdo con las condiciones dadas y sabiendo que el centro es (0, 0).
   a. $r = 6$
   b. Pasa por el punto $(-4, -2)$
   c. $r = \sqrt{5}$
   d. Pasa por el punto $(0, -7)$
   e. $r = 23$
   f. Pasa por el punto $(6, -3)$

Resolución de problemas

3. Verifica en cada caso si el punto P pertenece a la circunferencia dada.
   a. $P(5{,}66, -2); x^2 + y^2 = 36$
   b. $P(4, 2); x^2 + y^2 = 20$
   c. $P(6, -6); x^2 + y^2 = 72$

Evaluación del aprendizaje

Halla la ecuación canónica de cada circunferencia.

a.

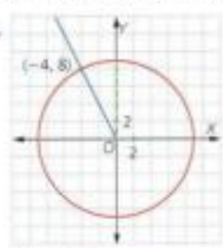


Figura 5.46

b.

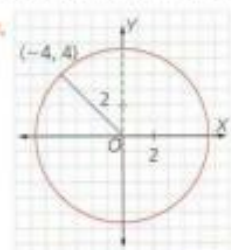


Figura 5.47

Estilos de vida saludable

Rodearte de gente positiva, te ayudará a alcanzar tus metas y te hará sentir bien contigo mismo. Por esto, la gente suele comentar que es importante escoger muy bien el círculo de amigos.

- ¿Por qué es importante que elijas bien a tus amigos?