Docente: Carlos Eduardo Sánchez Hueza		**Área**: Matemáticas
Grado: DÉCIMO	**Sede: La Rosita**	**Fecha**: tercer Periodo
Estándar: Comprensión y definición de las funciones trigonométricas. Trazo de las gráficas de las funciones trigonométricas y comprensión de sus propiedades Cálculo del valor aproximado del sen(x), cos(x) y tan(x) en contexto.		
DBA: Comprende la definición de las funciones trigonométricas sen(x) y cos(x), en las cuales x puede ser cualquier número real y calcula a partir del círculo unitario, el valor aproximado de sen(x) y cos(x). También traza sus gráficas e identifica sus propiedades (rango, dominio y periodo). . Comprende y utiliza la ley del seno y el coseno para resolver problemas de matemáticas y otras disciplinas que involucren triángulos no rectángulos.		
Nombre del estudiante:		

ACTIVIDAD #1:

RAZON DE CAMBIO

PAGINAS 58 – 59 – 60 - 61

Debes escribir en tu cuaderno las páginas **58 - 59,** teniendo cuidado de consignar todos los ejemplos que aparecen allí resueltos. Además, debes realizar las actividades de aprendizaje de la página **60 - 61.**

ACTIVIDAD #2:

LIMITE DE UNA SUCESION

PÁGINAS 62 - 63

Debes escribir en tu cuaderno las páginas **62**; analizando detenidamente su contenido. Escribe y analiza todos los ejemplos que aparecen. Además, realizar las actividades de aprendizaje de la página **63.**

ACTIVIDAD #3:

RAZONES TRIGONOMETRICAS

PÁGINAS 76 – 77 – 78 -79

Consigna en tu cuaderno las páginas **76 - 77**. Escribe los ejemplos que aparecen allí resueltos. Finalmente resuelve las actividades de aprendizaje de la página **78 - 79.**

ACTIVIDAD #4:

ANGULOS NOTABLES

PÁGINAS: 80 - 81 – 82 - 83

Consigna en tu cuaderno las páginas 80 - 81. Escribe los ejemplos que aparecen allí resueltos. Finalmente resuelve las actividades de aprendizaje de la página **82 – 83.**

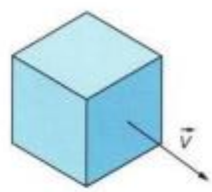
11 Variación lineal y exponencial. Razón de cambio

Saberes previos

¿Por qué crees que las ventanas enmarcadas en metal necesitan espaciadores de goma? ¿Qué ocurriría con ese tipo de ventanas si hace mucho calor y no tuviera espaciadores?

Analiza

A un cuerpo que lleva una velocidad de 3 m/s se le imprime una aceleración constante de 0,1 m/s².



- ¿Qué velocidad lleva el objeto después de 30 segundos?

Conoce

La velocidad final v_f de un objeto en función del tiempo al que se le imprime una aceleración constante a cuando parte desde un punto con una velocidad inicial v_0, viene dada por la expresión: $v_f = at + v_0$, donde la constante a es la pendiente de una recta y $b = v_0$ es su ordenada en el origen.

Así, como $v_0 = 3$ m/s, $a = 0{,}1$ m/s² y $t = 30$ s, entonces:

$v_f = 0{,}1 \text{ m/s}^2 (30 \text{ s}) + 3 \text{ m/s} = 3 \text{ m/s} + 3 \text{ m/s} = 6 \text{ m/s}$.

Así, el objeto lleva una velocidad de 6 m/s después de 30 s.

11.1 Variación lineal

Dos variables están relacionadas por una **variación lineal** si su gráfica es una línea recta que no pasa por el origen de coordenadas, es decir el punto de partida de una relación que es una variación lineal es un punto $(0, b)$.

Si y es la variable dependiente y x la variable independiente entonces y y x están relacionadas con una variación lineal si se cumple que $y = mx + b$ donde m representa la constante de variación lineal o pendiente de la recta y b corresponde a la ordenada desde la que parte la recta.

La gráfica de una variación lineal es una línea recta y la constante m se calcula a partir de las coordenadas de dos de sus puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), así:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo 1

La longitud L de un resorte varía linealmente con respecto a una masa M que se suspende del extremo del resorte. En la Tabla 2.20 se muestran los datos de dicha variación y la gráfica, que corresponde a una variación lineal, se presenta en la Figura 2.84.

L (cm)	M (kg)
2	0
3	0,2
4	0,4
5	0,6
6	0,8
7	1
8	1,2
9	1,4
10	1,6
11	1,8
12	2

Tabla 2.20

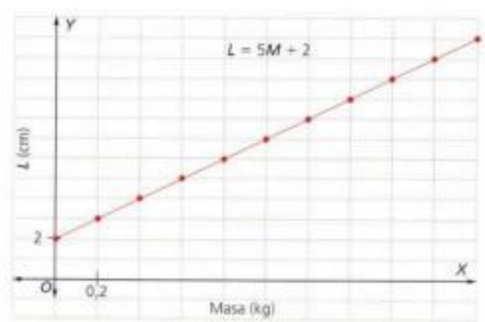
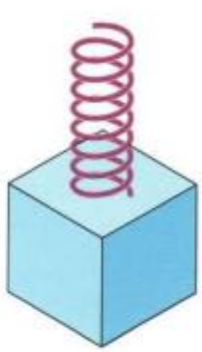


Figura 2.84

Para calcular la pendiente, podemos tomar dos puntos como (0,4; 4) y (1,6; 10):

$$m = \frac{10 \text{ kg} - 4 \text{ kg}}{1{,}6 \text{ cm} - 0{,}4 \text{ cm}} = \frac{6 \text{ kg}}{1{,}2 \text{ cm}} = 5 \text{ kg/cm}$$

De otra parte, la ordenada en el origen es $b = 2$, así que la variación que muestra la relación entre la longitud del resorte L y la masa M que se le suspende en su extremo viene dada por la expresión: $L = 5M + 2$.



11.2 Variación exponencial

Se denomina **variación exponencial** a aquella situación que se presenta cuando una cantidad $y = f(x)$ varía con respecto a otra cantidad x mediante la siguiente expresión: $f(x) = ka^x$, donde k es considerada como el valor inicial de $f(x)$ y a como una constante que define el crecimiento de la misma, razón por la cual se dice que $f(x)$ varía de una forma exponencial con respecto a x.

Ejemplo 2

En el año 2011 la población mundial era de casi 7 000 millones de personas con una tasa de crecimiento relativa de 2,56% anual. Si la población continúa creciendo a este ritmo, es posible determinar cuántas personas poblarán el mundo mediante la función: $P(t) = P_0e^{0{,}0256t}$ que muestra la variación exponencial de la población mundial con respecto a t.

Así, $P(10) = 7000e^{0{,}0256(10)} \approx 9\,024{,}20$ millones de habitantes.

11.3 Razón de cambio promedio

La **razón de cambio promedio** se refiere a la medida en la cual una variable se modifica con relación a otra.

Ejemplo 3

La gráfica de la Figura 2.85 muestra la cantidad de peces en un lago después de haber introducido 800 especímenes.

La razón de cambio entre los meses 10 y 30 está dada por:

$$\text{Razón de cambio promedio} = \frac{\text{Cambio en población}}{\text{Cambio en tiempo}} = \frac{5\,600 \text{ peces} - 1\,000 \text{ peces}}{20 \text{ meses}} = 510 \text{ peces/mes}$$

Figura 2.85

11.4 Razón de cambio instantánea

La **razón de cambio instantánea** de una función en un punto A, se refiere a la rapidez con que la pendiente de una curva cambia en determinado momento.

Ejemplo 4

Una empresa libera toneladas de un químico en la atmósfera para combatir el smog; estas se calculan mediante la función $f(x) = 0{,}2x^2 + 2x$, donde x es el tiempo, en horas.

La razón de cambio promedio de liberación de la sustancia química para los lapsos de 8,0001 a 8,00001 y 8,00001 a 8,000001 son los que se indican debajo de la gráfica de la Figura 2.86.

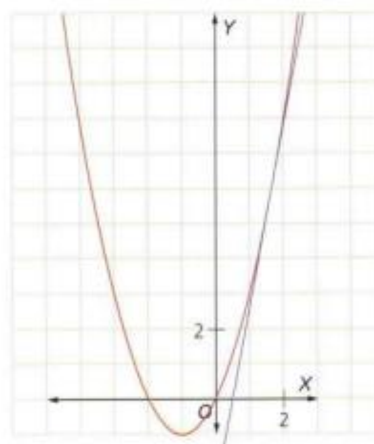


Figura 2.86

$$\frac{28{,}80052 - 28{,}800052}{8{,}0001 - 8{,}00001} = 5{,}1999 \text{ y}$$

$$\frac{28{,}800052 - 28{,}8000052}{8{,}00001 - 8{,}000001} = 5{,}1999$$

A medida que los intervalos de tiempo sean tan pequeños como se quiera, la razón de cambio promedio está cada vez más "cerca" del valor 5,2 (toneladas). Este valor corresponde a la razón o liberación de cambio instantánea, del químico, para $x = 8$.

11 Variación lineal y exponencial. Razón de cambio

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Un móvil aumenta su velocidad a medida que pasa el tiempo como se indica en la Tabla 2.21:

t(s)	0	1	2	3	4	5
v(m/s)	1	3	5	7	9	11

Tabla 2.21

a. Halla la pendiente de la recta que describe esos puntos y explica a qué corresponde.

b. Explica desde el punto de vista físico qué indica la ordenada en el origen.

c. Escribe la función que relaciona a t con v.

d. Traza la gráfica de esa función.

e. ¿Cuál será la velocidad del móvil a los 13 segundos si se sigue desplazando de la misma forma?

2 Un objeto es desplazado x metros cuando se le aplican diferentes fuerzas F sobre él, según se observa en los datos de la siguiente tabla:

f(N)	6	4	2	0
x(m)	0	1	2	3

Tabla 2.22

a. ¿Corresponde ese modelo a una variación lineal? Explica.

b. ¿Qué ocurre a medida que la fuerza que se le aplica al objeto aumenta?

c. ¿Cuál es el valor de la pendiente? ¿Cuál es su signo? ¿Qué indica ese signo?

d. ¿Qué fuerza debe aplicarse sobre el objeto para que se desplace 1,5 m?

e. Si al objeto se le aplica una fuerza de 3 N, ¿cuál será su desplazamiento?

Modelación

3 La gráfica de la Figura 2.87 representa la distancia a la que se encuentra una persona con respecto a otra en relación con el tiempo transcurrido. Explica en tus palabras cómo varían las dos variables representadas.

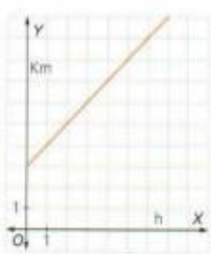


Figura 2.87

Razonamiento

4 Clasifica las variaciones que se representan en la Figura 2.88 como lineales, exponenciales o ninguna de estas. Justifica tu respuesta.

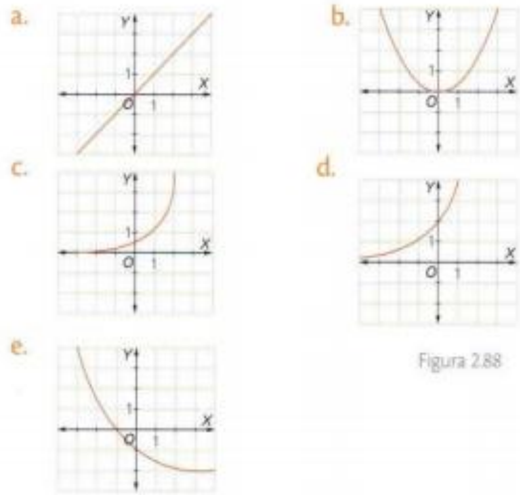


Figura 2.88

Resolución de problemas

5 Un cultivo de bacterias se duplica cada hora. Si inicialmente se cuenta con 30 bacterias, ¿cuántas bacterias hay al tiempo x?

6 En 1980, la población estimada de cierto país era de 357 millones, y creció a una tasa de alrededor del 20% anual. La población $N(t)$, t años más tarde se calcula con la expresión $N(t) = 651^{e0{,}02t}$.

¿Cuál era la población de este país en el año 2000?

7 El carbono 14 (C-14) es un elemento que se utiliza para conocer la edad de fósiles. Si el hueso de un animal encontrado cuando estaba vivo constaba de m gramos de ese elemento cada 5730 años esa cantidad se reducirá a la mitad de lo que había cada vez. Encuentra la fórmula que indica la cantidad en gramos que queda de C-14 después de x periodos de 5 730 años.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Comunicación

1 Clasifica como convergente, divergente o ninguna de estas cada una de las sucesiones que se representan en las Figuras 2.91 a 2.94

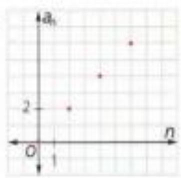
a.


Figura 2.91

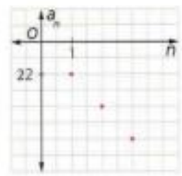
b.


Figura 2.92

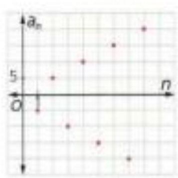
c.


Figura 2.93

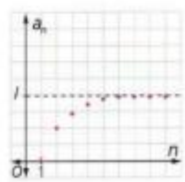
d.


Figura 2.94

Ejercitación

2 Escribe los primeros diez términos de cada sucesión e indica si son convergentes.

a. $a_n = 3 - 5n$

b. $a_n = n + 1$

c. $a_n = \dfrac{2n-3}{n^2+4}$

d. $a_n = \dfrac{n}{3} - 5$

e. $a_n = \dfrac{n}{2} + 4$

f. $a_n = \dfrac{n+6}{2n}$

g. $a_n = 8 + 0{,}2n$

h. $a_n = \dfrac{1}{2^n}$

i. $a_n = 3^n - 1$

j. $a_n = 2n + 1$

Razonamiento

3 Analiza el valor de verdad de las siguientes afirmaciones.

a. El límite de una sucesión cuyos términos son todos negativos es $-\infty$.

b. Una sucesión con todos sus términos iguales no tiene límite.

c. Si a partir de un término, todos los de la sucesión son mayores que un valor positivo cualquiera, la sucesión es divergente.

d. Una sucesión de términos decimales no puede tener por límite un número entero.

Modelación

4 Observa y describe cómo se obtiene la sucesión de cuadrados de menor tamaño de un paso a otro.

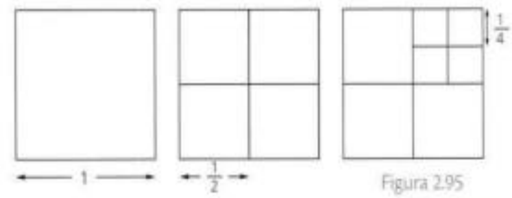


Figura 2.95

Pasos	1	2	3	4	5
N. de cuadrados	1	4	7	10	13
Longitud Longitud del lado del cuadrado más pequeño	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

Tabla 2.24

a. ¿Cuántos cuadrados hay en el décimo paso?

b. ¿Cuánto mide el lado de cada uno de los cuadrados más pequeños en este paso?

c. ¿Es la sucesión del número de cuadrados convergente o divergente?

d. ¿Es la sucesión de la longitud de los cuadrados más pequeños convergente?

Comunicación

5 Sea $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Los cinco primeros términos de esta sucesión son:

$a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 0 = 1,$

$a_4 = a_3 + a_2 = 1 + 1 = 2,$

$a_5 = a_4 + a_3 = 2 + 1 = 3$

Halla los siguientes cinco términos de la sucesión.

Evaluación del aprendizaje

De un material radiactivo se sabe que 1 kilogramo se reduce a la mitad cada año.

a. Escribe la cantidad de material después de los primeros tres años.

b. ¿A qué valor converge dicha sucesión?

c. Determina el año a partir del cual la cantidad de material restante es inferior a 1 gramo.

12 Introducción al límite de una sucesión

Saberes previos

Toma una calculadora y divide secuencialmente a 1 entre 2, 3, 4, 5 y 6. ¿Qué ocurre con los cocientes a medida que el divisor se hace mayor?

Analiza

Se inscriben polígonos regulares en una circunferencia de radio r.

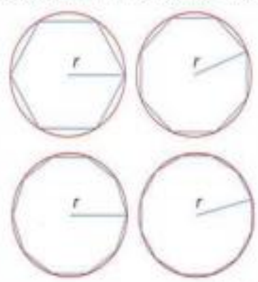


Figura 2.89

- ¿Qué ocurre con el perímetro de un polígono con un gran número de lados en comparación con el perímetro de la circunferencia?

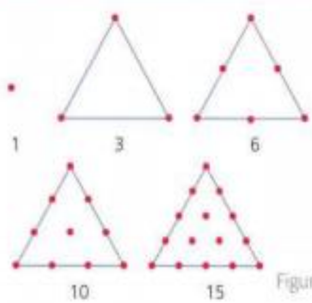


Figura 2.90

Conoce

Si P_n es el perímetro del polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio r, tantos más lados tenga este, más cerca estará su perímetro al de la circunferencia. Esto definirá una sucesión de los valores de los perímetros de los polígonos respecto a su número de lados. (Figura 2.89)

12.1 Sucesión

Una **sucesión** es una función cuyo dominio es el conjunto de los naturales y el cero o $\mathbb{N} \cup \{0\}$ y su codominio es cualquier otro conjunto de números, de figuras geométricas o de funciones.

Ejemplo 1

Los llamados números triangulares: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, ... conforman una sucesión cuyo término general es $x_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ y cuya representación gráfica se muestra en la Figura 2.90.

12.2 Límite de una sucesión

El **límite de una sucesión** es el número al cual se van aproximando los términos de una sucesión cuando n se hace lo suficientemente grande. Si existe tal valor, la sucesión es convergente y en caso contrario es divergente.

Si la sucesión a_n converge a un valor L, escribimos: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

Donde a_n es una expresión o un criterio que permite determinar cualquier término de la sucesión, conocido como término general. Para determinar el término general de una sucesión, se debe encontrar, una expresión que relacione el valor del término n-ésimo con el 0 y cualquier número natural n.

Ejemplo 2

La sucesión $a_n = 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, ...$ cuyo término enésimo es $a_n = \dfrac{1}{n}$, converge a 0, pues cuanto mayor sea el valor de n, el valor de $\dfrac{1}{n}$ se aproxima a 0, esto es: $\lim\limits_{n\to\infty} = \dfrac{1}{n} = 0$

Ejemplo 3

La sucesión $b_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ de números triangulares es divergente, porque cuanto mayor sea el valor de n, b_n crece indefinidamente. Esto se indica mediante el límite $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

Ejemplo 4

La sucesión $c_n = (-1)_n\, n$ cuyos primeros términos son $-1, 2, -3, 4, -5, 6,$ ... no es convergente ni divergente y se le denomina *oscilante*.

3 Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo

Saberes previos

Dibuja dos triángulos rectángulos isósceles y determina la razón entre uno de los catetos y la hipotenusa. ¿Obtienes aproximadamente el mismo valor? Explica tus observaciones.

Analiza

Observa la Figura 3.24.

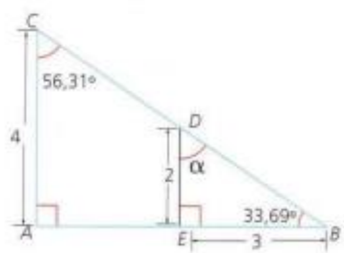


Figura 3.24

- ¿Cuál es la medida del ángulo α? ¿Cuánto mide el segmento AB?

Conoce

Los triángulos rectángulos ABC y EBD son semejantes porque cumplen el criterio de semejanza Ángulo-Ángulo (los dos tienen un ángulo recto y comparten la medida del ángulo de 33,69°). Por lo tanto, el ángulo α es congruente con el ángulo C; es decir, $\alpha = 56{,}31°$.

Por ser triángulos semejantes, se pueden establecer razones y proporciones entre las medidas de sus lados y así hallar la medida del segmento AB.

$$\frac{AC}{ED} = \frac{AB}{EB}\text{; entonces, } \frac{4}{2} = \frac{AB}{3}$$

Por lo tanto, $AB = 6$.

Otro tipo de razones se pueden establecer entre las medidas de los lados y los ángulos agudos en un triángulo rectángulo. Estas razones se denominan razones trigonométricas.

Sea el triángulo rectángulo de la Figura 3.25, se definen las **razones trigonométricas** del ángulo B como se presenta a continuación.

Seno del ángulo B	$\operatorname{sen} B = \dfrac{\text{Medida del cateto opuesto al } \measuredangle B}{\text{Medida de la hipotenusa}} = \dfrac{b}{a}$
Coseno del ángulo B	$\cos B = \dfrac{\text{Medida del cateto adyacente al } \measuredangle B}{\text{Medida de la hipotenusa}} = \dfrac{c}{a}$
Tangente del ángulo B	$\tan B = \dfrac{\text{Medida del cateto opuesto al } \measuredangle B}{\text{Medida del cateto adyacente al } \measuredangle B} = \dfrac{b}{c}$
Cotangente del ángulo B	$\cot B = \dfrac{\text{Medida del cateto adyacente al } \measuredangle B}{\text{Medida del cateto opuesto al } \measuredangle B} = \dfrac{c}{b}$
Secante del ángulo B	$\sec B = \dfrac{\text{Medida de la hipotenusa}}{\text{Medida del cateto adyacente al } \measuredangle B} = \dfrac{a}{c}$
Cosecante del ángulo B	$\operatorname{cosec} B = \dfrac{\text{Medida de la hipotenusa}}{\text{Medida del cateto opuesto al } \measuredangle B} = \dfrac{a}{b}$

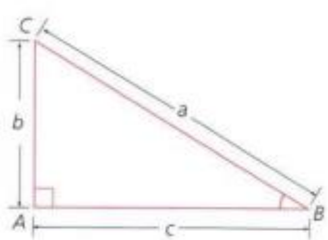


Figura 3.25

Una **razón trigonométrica** expresa la relación entre la medida de uno de los ángulos agudos y la medida de los lados de un triángulo rectángulo.

Ejemplo 1

Las razones trigonométricas para el ángulo agudo α en el triángulo rectángulo ABC de la Figura 3.26 se calculan aplicando las relaciones anteriores.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{3} \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cot\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \sec\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{3}{2}$$

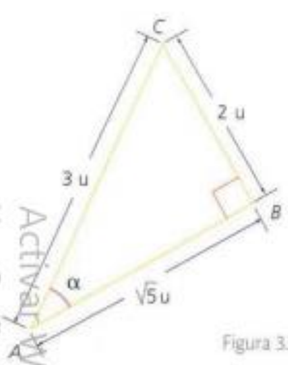


Figura 3.26

Ejemplo 2

Si se sabe que $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}$, es posible calcular las demás razones trigonométricas para el ángulo θ. Dado que el seno se define como la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa, se puede dibujar un triángulo rectángulo tal que θ sea uno de sus ángulos agudos, la longitud del cateto opuesto a θ sea $\sqrt{7}$ u y la de la hipotenusa, 4 u (Figura 3.27).

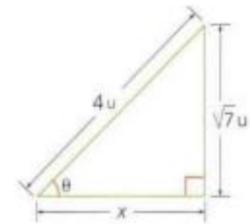


Figura 3.27

Al utilizar el teorema de Pitágoras, se obtiene que la longitud del cateto adyacente a θ está dada por:

$$x = \sqrt{4^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt{9} = 3 \text{ u}$$

De modo que, las demás razones trigonométricas se pueden calcular así:

$$\cos\theta = \frac{3}{4} \qquad \tan\theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{3}} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

Ejemplo 3

- Observa la Figura 3.28.

  Para calcular las razones trigonométricas de los ángulos α y β del triángulo rectángulo, se usa el teorema de Pitágoras como sigue:

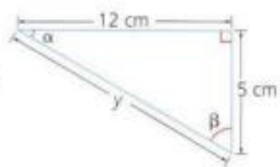


Figura 3.28

$$y^2 = 5^2 + 12^2 = \sqrt{25 + 144} = 13$$

Por lo tanto:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{5}{13} \qquad \cos\alpha = \frac{12}{13} \qquad \tan\alpha = \frac{5}{12}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{13}{5} \qquad \sec\alpha = \frac{13}{12} \qquad \cot\alpha = \frac{12}{5}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{12}{13} \qquad \cos\beta = \frac{5}{13} \qquad \tan\beta = \frac{12}{5}$$

$$\operatorname{cosec}\beta = \frac{13}{12} \qquad \sec\beta = \frac{13}{5} \qquad \cot\beta = \frac{5}{12}$$

- Si se sabe que $\operatorname{sen}\beta = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$ y $\tan\beta = \frac{3}{4}$, para calcular las demás razones trigonométricas se tiene en cuenta lo siguiente.

  Como $\operatorname{cosec}\beta$ es una razón inversa a $\operatorname{sen}\beta$, $\sec\beta$ es inversa a $\cos\beta$ y $\cot\beta$ es inversa a $\tan\beta$, entonces:

$$\operatorname{cosec}\beta = \frac{5}{3},\ \sec\beta = \frac{5}{4} \text{ y } \cot\beta = \frac{4}{3}$$

3 Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo

MatemaTICS

Calcula razones trigonométricas con la calculadora científica

Las calculadoras científicas permiten obtener las razones trigonométricas de un ángulo.

- Para calcular seno de 30° digita la secuencia:

sin 3 0 EXE

- Al calcular la cotangente, la secante y la cosecante se debe tener en cuenta que son razones trigonométricas inversas. Entonces, para calcular cosecante de 30° digita la secuencia.

1 ÷ (sin 3 0) EXE

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos de los triángulos rectángulos ABC tales que:

a. $m\measuredangle A = 90°$, $b = 10$ cm y $c = 12$ cm

b. $m\measuredangle B = 90°$, $b = 15$ cm y $c = 12$ cm

c. $m\measuredangle C = 90°$, $a = 15$ cm y $c = 25$ cm

Comunicación

2 Halla las razones trigonométricas del ángulo θ en cada triángulo rectángulo.

a.

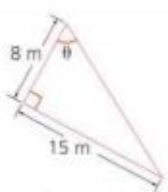


Figura 3.29

b.

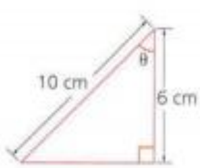


Figura 3.30

c.

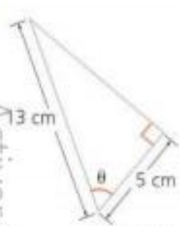


Figura 3.31

d.

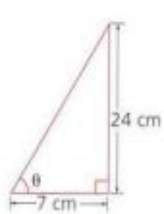


Figura 3.32

3 Encuentra, en cada caso, todas las razones trigonométricas del ángulo β.

a. Si $\tan\beta = \frac{7}{9}$

b. Si $\sec\beta = \frac{13}{5}$

Razonamiento

4 Calcula la cosecante, la secante y la cotangente del ángulo de menor amplitud del triángulo rectángulo cuyos catetos miden 5 cm y 10 cm, respectivamente.

Modelación

5 Halla las razones trigonométricas de un ángulo de 30° y de otro de 60°. Para ello, toma un triángulo equilátero de lado a y divídelo en dos por una de sus alturas.

Comunicación

6 Observa el triángulo de la Figura 3.33.

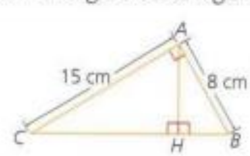


Figura 3.33

a. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos agudos C y B.

b. Halla la medida de $\overline{BH}$ y $\overline{CH}$.

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Ejercitación

7 Utiliza la calculadora para determinar el valor de las siguientes razones trigonométricas. Aproxima los resultados a las milésimas.

a. sen 36° b. cos 24°
c. tan 31° d. cosec 27°
e. sec 26° 33′ f. tan 23° 23′ 23″
g. $\cos \frac{3\pi}{7}$ h. sec 0,3
i. $\tan \frac{\pi}{5}$ j. cot 0,75

Razonamiento

8 Responde las siguientes preguntas.

a. En un triángulo rectángulo, ¿cuál es el lado de mayor longitud?

b. ¿Por qué el seno de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo nunca es mayor que 1?

c. ¿Es posible que la tangente de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo sea igual a 1? Justifica tu respuesta.

9 Halla las razones trigonométricas seno, coseno y tangente de manera exacta en cada uno de los triángulos.

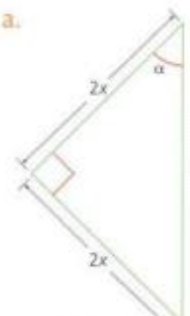
a.


Figura 3.34

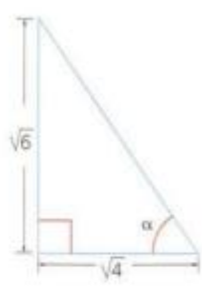
b.


Figura 3.35

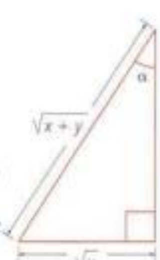
c.


Figura 3.36

d.


Figura 3.37

10 Utiliza la información para responder la pregunta.

En un triángulo *MNP*, ∡*P* es recto. ¿Qué relación existe entre el sen *M* y el cos *N*? Justifica tu respuesta.

11 Calcula la altura, el perímetro y el área del trapecio de la Figura 3.38.

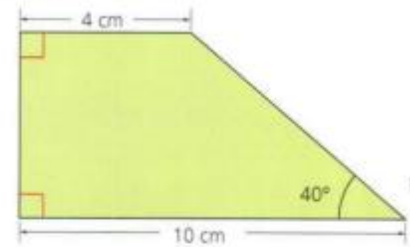


Figura 3.38

12 Halla las razones trigonométricas para el ángulo cuyo vértice es (0, 0), si su lado inicial coincide con el eje *X* y su lado terminal pasa por el punto dado.

a. (3, 1) b. (1, 3)
c. (1, 1) d. (2, 2)

Evaluación del aprendizaje

i Las bases de un trapecio isósceles miden 10 cm y 5 cm, respectivamente. El ángulo que forma la base mayor con cada uno de los lados no paralelos es de 35°.

Calcula la altura, el perímetro y el área del trapecio.

ii Un cono mide 3 cm de radio y 7 cm de altura (Figura 3.39).

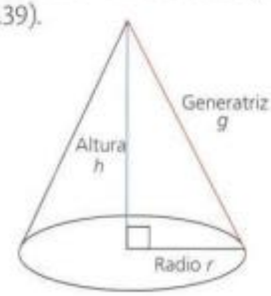


Figura 3.39

a. Halla la medida de la generatriz.
b. Encuentra el área del cono.
c. Calcula el volumen del cono.
d. Expresa las razones trigonométricas seno y coseno entre los elementos del cono, tomando como ángulo α aquel formado por el radio y la generatriz.

4 Razones trigonométricas de ángulos notables

Saberes previos

Dibuja un triángulo equilátero, traza sus tres alturas y mídelas. ¿Obtuviste el mismo valor? ¿Cuántos triángulos rectángulos determinaste al trazar las alturas?

Analiza

La medida de los lados del triángulo equilátero ABC de la Figura 3.40 es a, y $\overline{BM}$ es la altura sobre el lado $\overline{AC}$.

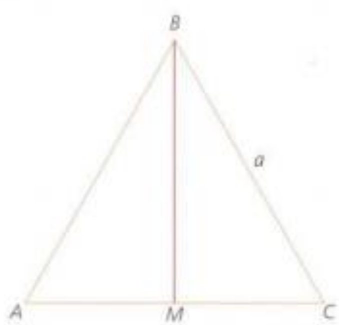


Figura 3.40

- ¿Cuáles son las medidas de los ángulos internos del $\triangle BMC$?

  ¿Cuáles son las medidas de $\overline{MC}$ y $\overline{BM}$?

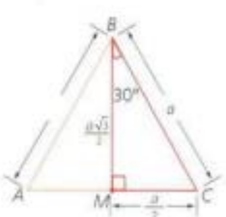


Figura 3.42

Conoce

Como el $\triangle ABC$ es equilátero, los ángulos interiores miden 60°; por lo tanto, $m\measuredangle ACB = 60°$. Por su parte, la altura $\overline{BM}$ forma sobre $\overline{AC}$ el ángulo recto BMC; es decir que $m\measuredangle BMC = 90°$. Por último, la altura $\overline{BM}$ es bisectriz de $\measuredangle ABC$, lo que significa que $m\measuredangle CBM = 30°$ (Figura 3.41).

La altura $\overline{BM}$ del $\triangle ABC$ determina dos segmentos de igual medida (por ser triángulo equilátero); por lo tanto, la medida de $\overline{MC}$ es $\frac{a}{2}$.

Para calcular la longitud de $\overline{BM}$, se utiliza el teorema de Pitágoras.

$$a^2 = (BM)^2 + (MC)^2 \quad \Rightarrow \quad (BM)^2 = a^2 - (MC)^2$$

$$(BM)^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad BM = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$BM = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} \quad \Rightarrow \quad BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

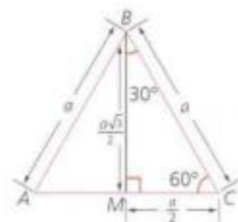


Figura 3.41

4.1 Razones trigonométricas para el ángulo de 30°

Para calcular las razones trigonométricas del ángulo de 30°, se utiliza un triángulo como el de la Figura 3.42.

En este caso el cateto opuesto mide $\frac{a}{2}$, el cateto adyacente $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ y la hipotenusa a.

Por lo anterior:

$$\operatorname{sen} 30° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \cot 30° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\sec 30° = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \operatorname{cosec} 30° = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2$$

Las **razones trigonométricas para el ángulo de 30°** son:

$\operatorname{sen} 30° = \frac{1}{2}$ $\quad \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cot 30° = \sqrt{3}$ $\quad \sec 30° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\quad \operatorname{cosec} 30° = 2$

4.2 Razones trigonométricas para el ángulo de 60°

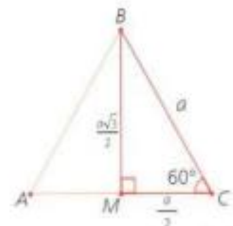


Figura 3.43

Para calcular las razones trigonométricas del ángulo de 60°, se utiliza un triángulo como el de la Figura 3.43. En este caso el cateto opuesto mide $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, el cateto adyacente $\frac{a}{2}$ y la hipotenusa a.

Por lo anterior:

$$\operatorname{sen} 60° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} \qquad \cot 60° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec 60° = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2 \qquad \operatorname{cosec} 60° = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

4.3 Razones trigonométricas para el ángulo de 45°

Para calcular las razones trigonométricas de un ángulo de 45°, se utiliza un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados congruentes miden a y cuyos ángulos agudos miden 45°, como se muestra en la Figura 3.44.

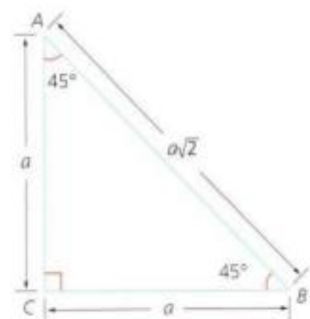


Figura 3.44

Para calcular la longitud de $\overline{AB}$, se utiliza el teorema de Pitágoras.

$$(AB)^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow \qquad (AB)^2 = 2a^2 \qquad \Rightarrow \qquad AB = a\sqrt{2}$$

Por lo anterior:

$$\operatorname{sen} 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45° = \frac{a}{a} = 1 \qquad \cot 45° = \frac{a}{a} = 1$$

$$\sec 45° = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} \qquad \operatorname{cosec} 45° = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$$

Ejemplo 1

Una escalera de seis metros se apoya contra una pared. Si forma un ángulo de 60° con el suelo, ¿hasta qué altura llega? ¿A qué distancia de la pared queda la base de la escalera?

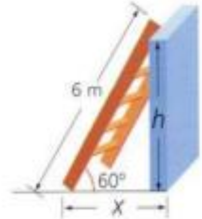


Figura 3.45

Para responder la primera pregunta se puede usar la razón seno, así:

$\operatorname{sen}60° = \frac{h}{6}$ de donde, $h = 6 \cdot \operatorname{sen}60° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ m $= 5{,}2$ m.

Para determinar la distancia a la que se encuentra la base de la escalera a la pared, conviene usar la definición de la razón coseno:

$\cos 60° = \frac{x}{6}$. Al despejar x: $x = 6 \cdot \cos 60° = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$ m.

4 Razones trigonométricas de ángulos especiales

Ejemplo 2

Utilizando los valores de las razones trigonométricas para los ángulos de 30°, 45° y 60° es posible calcular el valor de la siguiente expresión:

$$\operatorname{sen} 30° + \cos 45° + \tan 60°$$

$$\operatorname{sen} 30° + \cos 45° + \tan 60° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3} = \frac{1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{2}$$

Ejemplo 3

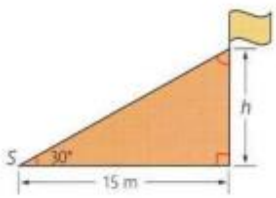


Figura 3.46

Un agrimensor observa que un punto S ubicado al nivel del suelo está a una distancia de 15 m de la base del asta de una bandera, como se muestra en la Figura 3.46. Para hallar la medida h del asta, se puede utilizar una razón trigonométrica de 30°. En este caso, resulta conveniente emplear tan 30°, pues h corresponde a la longitud del cateto opuesto y el cateto adyacente mide 15 m.

$$\tan 30° = \frac{h}{15} \Rightarrow h = 15 \cdot \tan 30° \Rightarrow h = 15 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow h = 5\sqrt{3}$$

Entonces, la longitud del asta es de $5\sqrt{3}$ m.

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1. Halla el valor numérico de cada expresión.

a. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$

b. $\tan\frac{\pi}{3} - \sec\frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec}\frac{\pi}{4}$

c. $\cot\frac{\pi}{6} \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \cdot \cot\frac{\pi}{4}$

2. Calcula el valor exacto de las siguientes expresiones.

a. $\operatorname{cosec}\frac{\pi}{3} + \tan\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$

b. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3} \cdot \cot\frac{\pi}{4}$

c. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} - \tan\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}$

Comunicación

3. Calcula los valores de a y b en los triángulos rectángulos de las figuras 3.47 y 3.48.

a.

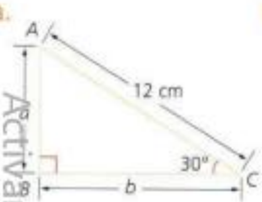


Figura 3.47

b.

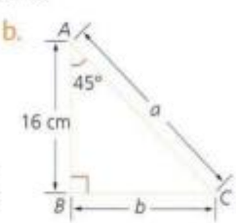


Figura 3.48

Razonamiento

4. Encuentra la medida desconocida en los triángulos rectángulos de las figuras 3.49 a 3.54.

a.

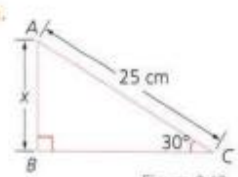


Figura 3.49

b.

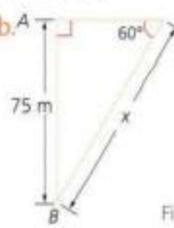


Figura 3.50

c.

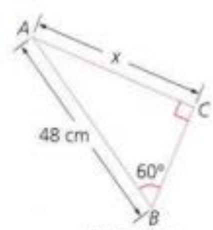


Figura 3.51

d.

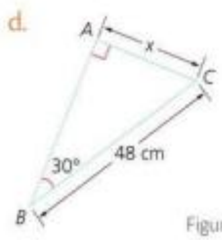


Figura 3.52

e.

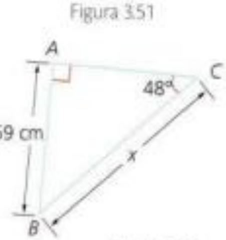


Figura 3.53

f.

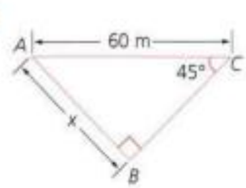


Figura 3.54

5 Resuelve.

a. Explica por qué el seno y el coseno de un ángulo de 45° son iguales.

b. En términos de las medidas de los catetos, ¿cómo se puede interpretar el resultado $\tan 45° = 1$?

6 Explica cómo se puede hallar la medida del lado de un cuadrado, si se conoce la medida de una de sus diagonales y no se dispone de instrumentos de medición.

7 Calcula la medida a del lado del cuadrado que se muestra en la Figura 3.55.

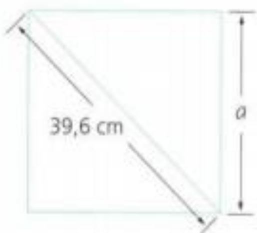


Figura 3.55

8 La máxima distancia horizontal que alcanza una balón al ser pateado desde la grama se determina con la expresión $x = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen} A \operatorname{Cos} A}{g}$, donde A es el ángulo de tiro y g la aceleración de la gravedad. ¿Con qué ángulo se logra el mayor alcance, con uno de 30°, con uno de 45° o con uno de 60°? Explica.

Resolución de problemas

9 En la Figura 3.56 se observa el plano de una zona de juego, en la que se ubicó una cuerda a lo largo de una de sus diagonales.

La longitud de la cuerda utilizada para dividir el rectángulo es 12 m y el lado más corto del rectángulo mide 7 m.

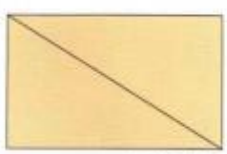


Figura 3.56

¿Cuál es la medida del ángulo determinado por la diagonal y el lado más largo del rectángulo? ¿Cuál es el área de la zona de juego?

10 Cuando la inclinación de los rayos del sol es de 30°, la sombra de un árbol mide 17,32 m. ¿Cuál es la altura del árbol? Resuelve el mismo problema para cuando el ángulo sea 45º y luego 60º. Obtén una conclusión.

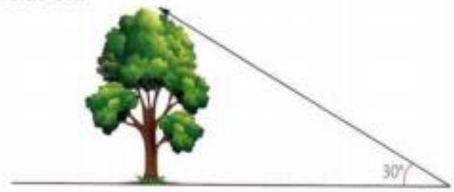


Figura 3.57

Evaluación del aprendizaje

i Halla el valor de cada expresión:

a. $\dfrac{\operatorname{sen} 30° + \cos 45°}{\cos 60°}$

b. $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

ii Halla la altura del árbol y la distancia a la que se halla de la estaca.

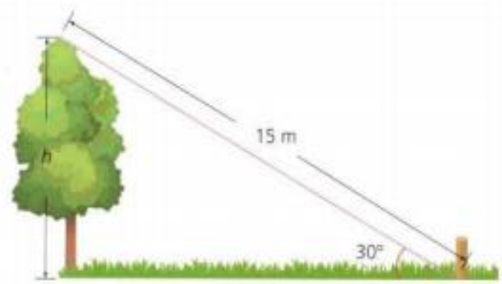


Figura 3.58

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

Dos planetas están en semisextil cuando la distancia angular entre ambos es de 30 grados. Los astrólogos toman este hecho para definir los 12 signos del zodiaco.

- ¿Qué opinas de quienes toman decisiones basados en el horóscopo?