	ALCALDÍA DE VILLAVICENCIO	FR-1540-GD01	
	INSTITUCIÓN EDUCATIVA CENTAUROS	Vigencia: 2014	
	PLANEACION TERCER PERIODO	Documento controlado	
		PERIODO:3	

Docente: **ELCIRA RIVERA GRANADA**		Área: **MATEMATICAS**
Grado: **ONCE**	Sede: **LA ROSITA JM**	Fecha: **JULIO -12 - 2020**
ESTANDAR: Comprendo e interpreto problemas utilizando números reales, simplificando cálculos y aplicando propiedades de las operaciones, en contextos diferentes contextos.		
DBA: Interpreta operaciones básicas como: Suma, Resta, Multiplicación y División, aplicadas a las sucesiones de números reales y propiedades de los límites de funciones.		

JOHN WALLIS:

Matemático inglés, Contribuyó en el desarrollo del cálculo moderno y en el cálculo infinitesimal; fue él quien introdujo el símbolo **∞**, que actualmente se utiliza para representar una cantidad incontable, o sea, infinita.

ACTIVIDAD #1: PÁGINAS: 72 – 73

Simplemente escribes en tu cuaderno las páginas **72** y **73**, teniendo muy presentes de consignar los conceptos y definiciones que son muy importantes para comprender los ejercicios. No olvides consignar los ejemplos: 1,2,3,4 que allí aparecen resueltos.

ACTIVIDAD # 2: PÁGINAS: 74 – 75

Consigna la página **74** teniendo en cuenta los conceptos de sucesiones acotadas superiormente e inferiormente. Resuelve en tu cuaderno, la actividad de aprendizaje que aparece en la página **75**.

ACTIVIDAD #3: PÁGINAS: 76 – 77

Consigna en tu cuaderno la página **76** sobre sucesiones convergentes y sucesiones divergentes con sus respectivos ejemplos resueltos que allí aparecen. Resuelve la actividad de aprendizaje que aparece en la página **77**.

ACTIVIDAD #4: PÁGINAS: 78 – 79

Consigna la página **78** teniendo presente de plasmar en tu cuaderno las propiedades de los límites de sucesiones y el ejemplo #1 como aplicación a estas propiedades. Resuelve la actividad de aprendizaje que aparece en la página **79**.

1 Sucesiones de números reales. Monotonía y acotación

Saberes previos

Observa:

$1+5=6 \quad 6+5=11 \quad 11+5=16$

Si se continúa de esa manera, ¿se obtendrá el número 41 en algún momento?

Analiza

Lina escribió los primeros diez múltiplos de 5 y ahora quiere hallar el vigésimo, el quincuagésimo y el centésimo múltiplo de ese número.

- ¿Cómo puede hacerlo?

Conoce

Se conocen como **múltiplos** de un número a todos aquellos que resultan de la multiplicación de ese número con cada uno de los naturales. Así, los diez primeros múltiplos de 5, diferentes de 0, son {5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50}.

Para establecer una expresión que permita determinar cualquier otro múltiplo de 5, Lina podría empezar asignando a cada múltiplo una posición, como se muestra a continuación.

Posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valor	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

Tabla 3.1

Cada múltiplo está relacionado con la asignación dada, es decir, depende de su posición. Así, el primer término es 5, el segundo término es 10, el quinto término es 25. Cualquier múltiplo de 5 se puede hallar mediante la expresión $5n$, siendo n la posición del múltiplo que se desea encontrar.

Por tanto, el vigésimo término se obtiene cuando $n = 20$: $5 \cdot 20 = 100$; el quincuagésimo cuando $n = 50$: $5 \cdot 50 = 250$, y el centésimo cuando $n = 100$: $5 \cdot 100 = 500$.

El ejemplo anterior permite identificar una lista de números escritos en un orden definido: $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$, en donde a_1 es el primer término, a_2 es el segundo término y, en general, a_n es el enésimo término. Esta colección de números que guardan cierta correspondencia se denomina **sucesión**.

Una **sucesión de números reales** es una relación del conjunto de los números naturales con el conjunto de los números reales. Establecer una sucesión es encontrar una regla o **término general** que asigna a cada número natural n un único número real, a_n, conocido como **enésimo término** de la sucesión.

Muchas sucesiones quedan determinadas por su término general, a_n, que suele ser una expresión algebraica en términos de la variable indeterminada n.

Algunas veces, las sucesiones se determinan por sus primeros términos que, en ocasiones, permiten también intuir el valor del término general.

Ejemplo 1

Para encontrar los cinco primeros términos de una sucesión, se sustituye sucesivamente n por 1, 2, 3, 4 y 5 en el término general. El décimo término se encuentra al reemplazar n por 10. Para las sucesiones b_n y c_n dadas se tiene que:

Sucesión	Primeros cinco términos	Décimo término
$b_n = \frac{n}{n+1}$	$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$	$\frac{10}{11}$
$c_n = (-1)^{n+1}\,\frac{1}{n}$	$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}$	$-\frac{1}{10}$

1.1 Sucesiones monótonas

Una sucesión a_n es **monótona creciente** si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n, es decir, si cada término de la sucesión es mayor o igual que el anterior y **estrictamente creciente** si $a_n < a_{n+1}$ para todo n.

Una sucesión a_n es **monótona decreciente** si $a_n \geq a_{n+1}$ para todo n, es decir, si cada término de la sucesión es menor o igual que el anterior y **estrictamente decreciente** si $a_n > a_{n+1}$ para todo n.

Ejemplo 2

Son ejemplos de sucesiones estrictamente crecientes:

$$a_n = \frac{7n+3}{2n+1} = \left\{\frac{10}{3}, \frac{17}{5}, \frac{24}{7}, \frac{31}{9}, \frac{38}{11}, \ldots\right\}$$

$$a_n = 2n^{n+1} = \{2, 16, 162, 2\,048, 31\,250, \ldots\}$$

Esto sucede porque en ambas $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n < a_{n+1}$, es decir, los valores de los términos de cada sucesión aumentan progresivamente.

Son ejemplos de sucesiones decrecientes:

$$a_n = \frac{n}{n^2+1} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \frac{5}{26}, \ldots\right\}$$

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n} = \left\{\sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{5}, \ldots\right\}$$

Esto sucede porque en ambas $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_n > a_{n+1}$, es decir, los valores de los términos de la sucesión disminuyen progresivamente.

Ejemplo 3

Para mostrar que $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ es una sucesión estrictamente decreciente, debe probarse que $a_n > a_{n+1}$ para todo número natural n; esto significa que:

$$\frac{1}{(n+1)^2+1} < \frac{1}{n^2+1}$$

En efecto, puesto que $(n+1)^2 > n^2 + 1$ y ambos son positivos; entonces, por las propiedades de las desigualdades:

$$\frac{1}{(n+1)^2+1} < \frac{1}{n^2+1}$$

Luego, $a_n > a_{n+1}$, así que a_n es estrictamente decreciente.

Ejemplo 4

La sucesión $a_n = 1^n = \{1, 1, 1, 1, 1, \ldots\}$ es una sucesión **constante**, ya que todos sus términos son iguales, es decir, $a_n = a_{n+1}$ para todo n.

1 Sucesiones de números reales. Monotonía y acotación

1.2 Sucesiones acotadas

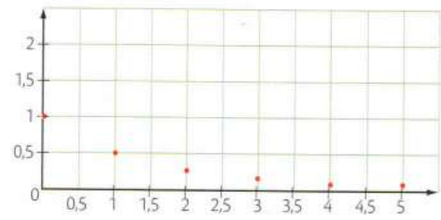

Figura 3.1

Una **sucesión** está **acotada superiormente** si existe algún número real mayor o igual que todos los términos de la sucesión. Es decir, existe $M \in \mathbb{R}$, tal que:

$$a_n \leq M \text{ para todo } n.$$

Una **sucesión** está **acotada inferiormente** si existe algún número real menor o igual que todos los términos de la sucesión. Es decir, existe $m \in \mathbb{R}$, tal que:

$$a_n \geq m \text{ para todo } n.$$

Una **sucesión** acotada superior e inferiormente a la vez se dice que es acotada.

La Figura 3.1 corresponde a la representación gráfica de una sucesión acotada.

Ejemplo 5

- La sucesión $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, ...\right\}$ es una sucesión acotada, puesto que $0 < a_n \leq 1$. Una cota superior de la sucesión es 1 y una inferior es 0.
- Para $a_n = \frac{5}{n+1} = \left\{\frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}, 1, \frac{5}{6}, ...\right\}$, se tiene que $0 < a_n \leq 5$ para todo n. Así, una cota superior de la sucesión es 5 y una inferior es 0.
- La sucesión $a_n = 2n + 1 = \{3, 5, 7, 9, 11, ...\}$ es acotada inferiormente por $m = 3$, pero no tiene una cota superior.

Ejemplo 6

Se quiere demostrar que la sucesión $a_n = \frac{2n+3}{n+3}$ es acotada superiormente y monótona creciente.

Para demostrar que es acotada superiormente, se debe encontrar un número real M que sea mayor o igual que todos los a_n:

$$a_n = \frac{2n+3}{n+3} < \frac{2n+3+3}{n+3} = \frac{2(n+3)}{n+3} = 2 \Rightarrow \text{Por tanto, el número buscado puede ser } M = 2.$$

Para demostrar que es creciente, se debe comprobar que $a_n \leqslant a_{n+1}$, para cualquier valor de n. Pero eso es equivalente a comprobar que $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$, para cualquier n:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(n+1)+3}{(n+1)+3} - \frac{2n+3}{n+3} = \frac{(2n+5)(n+3) - (2n+3)(n+4)}{(n+4)+(n+3)}$$

$$= \frac{3}{(n+4)(n+3)} \geqslant 0 \text{ pues tanto el numerador como el denominador son siempre positivos.}$$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Encuentra los primeros cinco términos de cada sucesión.

a. $a_n = 3n - 2$ b. $a_n = \frac{1}{3n}$

c. $a_n = \frac{1}{n+1}$ d. $a_n = n^2 + 2$

e. $a_n = \frac{2}{2n+1}$ f. $a_n = \frac{2n^2}{3}$

2 Halla el término general para cada una de las siguientes sucesiones.

a. $a_n = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

b. $a_n = \{1, 4, 9, 16, ...\}$

c. $a_n = \{4, 8, 12, 16, ...\}$

d. $a_n = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...\right\}$

e. $a_n = \left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, ...\right\}$

f. $a_n = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{11}, \frac{4}{18}, ...\right\}$

3 Encuentra los primeros cuatro términos y el décimo término de cada sucesión.

a. $a_n = \frac{7 - 4n^2}{3 + 2n^2}$ b. $a_n = \frac{(2n-1)(3n+1)}{n^3+1}$

c. $a_n = 1 - \frac{2}{n}$ d. $a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{3n-1}$

e. $a_n = \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$ f. $a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n^2}$

g. $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ h. $a_n = (-1)^n\frac{n}{(n+1)(n+2)}$

4 Encuentra los cinco primeros términos de cada sucesión dada: $a_n = \frac{n+1}{n-1}$, $b_n = \frac{1}{2n+1}$ y $c_n = \frac{n}{5n}$.

a. a_n b. b_n

c. c_n d. $a_n + b_n$

e. $a_n + c_n$ f. $b_n + c_n$

g. $a_n \cdot b_n$ h. $b_n \cdot c_n$

Razonamiento

5 Clasifica las siguientes sucesiones en crecientes, decrecientes o constantes.

a. $a_n = 2^n$ b. $a_n = 1 - n$

c. $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$ d. $a_n = (-1)^n \cdot n$

6 Determina formalmente cuáles sucesiones son crecientes y cuáles no.

a. $a_n = n - 1$ b. $a_n = \frac{3}{n}$

c. $a_n = \frac{10 - 1}{2n^{n-1}}$ d. $a_n = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n}{(n+1)^3}$

Resolución de problemas

7 Después de una operación de rodilla, Mario debe comenzar una rutina de ejercicios y aumentar gradualmente el ritmo. El médico le sugiere trotar doce minutos diariamente durante la primera semana. En las semanas posteriores debe incrementar el tiempo seis minutos con respecto a la semana anterior. ¿En cuántas semanas Mario llegará a entrenar 60 minutos diarios?

Evaluación del aprendizaje

✓ Halla los primeros cinco términos de cada sucesión y clasifícala de acuerdo con su monotonía.

a. $a_n = 2n + 3$ b. $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$

c. $a_n = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$ d. $a_n = \frac{\text{sen}(n)}{2}$

e. $a_n = \left(\frac{n+1}{2n}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ f. $a_n = \frac{n}{2}$

Estilos de vida saludable

Para una relación huésped – parásito, se determinó que cuando la densidad de huéspedes (número de huéspedes por unidad de área) es x, el número de parásitos es p, con $p(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + x + 1}$.

- ¿Qué sucede con el número de parásitos cuando la densidad de huéspedes es muy grande?
- ¿Cómo evitas el contacto con parásitos?

2 Límite de una sucesión. Convergencia de sucesiones

Saberes previos

Al ejercitar un músculo, éste aumenta 3 milímetros el primer día. Además, el incremento de cada día es igual a 0,95 del incremento del día anterior. ¿Cuál será el incremento total al final del día 18?

Analiza

Un minero encuentra una muestra de mineral que contiene 500 mg de material radioactivo. Ese material tiene una vida media de un día, lo que significa que al final de cada día, queda la mitad de este.

- Halla la cantidad de material radioactivo al comienzo del séptimo día.

Conoce

Si $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$ corresponde a la cantidad de material al comienzo del día, entonces:

$a_1 = 500$ mg $\quad a_2 = 250$ mg $\quad a_3 = 125$ mg $\quad a_4 = 62{,}5$ mg

$a_5 = 31{,}25$ mg $\quad a_6 = 15{,}625$ mg $\quad a_7 = 7{,}8125$ mg

A medida que pasan los días, la cantidad de material radioactivo sigue disminuyendo hasta casi desaparecer, pero nunca llega a ser 0 mg.

2.1 Sucesiones convergentes

Sea a_n una sucesión en $\mathbb{R}$. Se dice que a_n converge a L, si y solo si, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n > N$, $|a_n - L| < \varepsilon$.

Entonces y sólo entonces se dice que L es el límite de la sucesión a_n cuando $n \to \infty$; esto es, $a_n \to L$ cuando $n \to \infty$ o simplemente $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$.

Es decir, el límite de la sucesión a_n es el número real L si, para cualquier entorno de centro L y radio ε tan pequeño como se quiera, se puede encontrar un término de la sucesión tal que, a partir de este, todos los términos de la sucesión pertenecen al entorno (Figura 3.2).

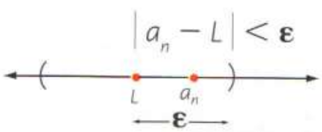

Figura 3.2

Ejemplo 1

Observa cómo se prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, es decir que la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ converge a 0.

Sea $\varepsilon > 0$, ¿Para qué valor de n es cierto que $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$?

Para $n > \frac{1}{\varepsilon}$, es decir, para cualquier número positivo ε, hay un número $N = \frac{1}{\varepsilon}$ tal que $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$ con $n \in \mathbb{N}$ y $n > N$.

En la Figura 3.3 se observa que cuando n crece, los términos se acercan progresivamente a 0.

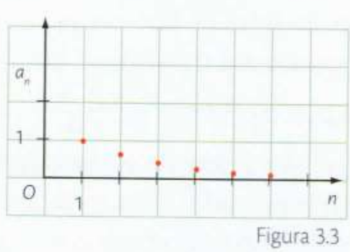

Figura 3.3

2.2 Sucesiones divergentes

Una sucesión a_n es **divergente** si su límite es $+\infty$ o $-\infty$. En este caso, se dice que a_n diverge hacia $+\infty$ o $-\infty$.

Que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ significa que para todo número positivo M existe un número entero $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$, $a_n > M$.

Ejemplo 2

Si a_n es una sucesión divergente con $a_n \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces la sucesión $\frac{1}{a_n}$ converge a 0. Para demostrar esta afirmación, se fija $\varepsilon > 0$.

Para $\frac{1}{\varepsilon} > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$,, entonces $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Como $\varepsilon > \frac{1}{a_n}$ y por definición $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, la sucesión converge a cero.

Ejemplo 3

Los términos de la sucesión $a_n = 1 + 2n^2$ crecen indefinidamente a medida que n también lo hace. Así, a_n no se acerca a un $L \in \mathbb{R}$. Por tanto, $\lim_{n \to \infty}(1+2n^2) = +\infty$.

La sucesión $a_n = 1 + 2n^2$ es divergente (Figura 3.4).

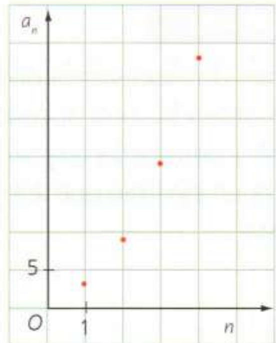

Figura 3.4

2.3 Otras sucesiones

Existen sucesiones que ni son convergentes a un número ni son divergentes hacia $+\infty$ o $-\infty$. Estas reciben el nombre de **sucesiones alternantes**.

Ejemplo 4

$a_n = (-1)^n$ es una sucesión que oscila entre -1 y 1 (Figura 3.5), es decir, ni converge ni diverge, alterna entre los valores dados.

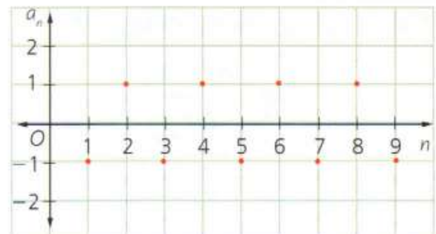

Figura 3.5

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Halla el término general de cada una de las siguientes sucesiones. Clasifícalas como convergentes, divergentes o ninguna de estas.

a. $-3, -1, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \ldots$

b. $-1, 2, -3, 4, -5, \ldots$

c. $3, -2, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \ldots$

d. $\frac{5}{6}, \frac{7}{12}, \frac{9}{24}, \frac{11}{48}, \frac{13}{96}, \ldots$

e. $-4, 9, -16, 25, -36, \ldots$

2 Resuelve lo que se indica si $a_n = 3 + \frac{1}{n}$.

a. Halla sus primeros 10 términos.

b. Dibuja en el pano cartesiano los 10 puntos que encontraste en el literal a.

c. Demuestra que a_n converge a 3.

Resolución de problemas

3 Dada la sucesión definida por recurrencia de la siguiente manera:

$$a_1 = \sqrt{2} \qquad a_n = \sqrt{2 \cdot a_{n-1}}$$

Decide si es convergente.

Evaluación del aprendizaje

Encuentra los cuatro primeros términos de cada sucesión e indica si es convergente, divergente o ninguna de las dos.

a. $a_n = 2^n$

b. $a_n = \left(\frac{1}{n+1}\right)^n$

c. $a_n = 3 - \frac{1}{n+1}$

d. $a_n = \frac{n^2}{n^2+1}$

e. $a_n = \frac{(-2)^n}{2^n}$

f. $a_n = \frac{(-n)^2}{n+1}$

g. $a_n = 1 - \frac{1}{2^n}$

h. $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$

Educación ambiental

Si el porcentaje de contenido de oxígeno después de t días de tirar basura orgánica en un estanque está dado por $p(t) = 100\left(\frac{t^2 + 10t + 100}{t^2 + 20t + 100}\right)$ con respecto al nivel normal. ¿Qué ocurre con ese porcentaje cuando t aumenta toma valores tan grandes como se quiera? ¿Cómo crees que se puede acelerar este aumento?

3 Propiedades de los límites de sucesiones

Saberes previos

¿Si se suman dos sucesiones divergentes, se obtendrá otra sucesión divergente? Si consideras que no es así, muestra un ejemplo que apoye tu respuesta.

Analiza

Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{2n^2}\right)$$

Conoce

En la sucesión $a_n=\dfrac{n^2-1}{2n^2}=\left\{0,\dfrac{3}{8},\dfrac{4}{9},\dfrac{15}{32},\dfrac{12}{25},\dfrac{35}{72},...,\dfrac{99}{200},...\right\}$, cuando n crece, los términos se acercan progresivamente a $\frac{1}{2}$. Si se usa la calculadora para hallar la expresión decimal de cada uno de los anteriores términos se puede evidenciar esta tendencia: {0, 0,38, 0,44, 0,47, 0,48, 0,49, ... , 0,495,...}.

Así, $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-1}{2n^2}\right)=\dfrac{1}{2}$.

3.1 Álgebra de límites

Si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, entonces se verifica que:

a. $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b$

b. $\lim_{n\to\infty}(k\cdot a_n)=k\cdot a;\ k\in\mathbb{R}$

c. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[p]{a_n}=\sqrt[p]{a}$

d. $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=a-b$

e. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{a}{b}$, siempre que $b\neq 0$

f. $\lim_{n\to\infty}k^{a_n}=k^a$

g. $\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=a\cdot b$

h. $\lim_{n\to\infty}\left(a_n^{b_n}\right)=a^b$

i. $\lim_{n\to\infty}k=k$, esto es, el límite de una sucesión constante $a_n=k$ es la misma constante.

Además, si dos sucesiones son divergentes hacia $+\infty$, la sucesión formada por la suma de los términos de ambas también diverge hacia $+\infty$, es decir:

$$\text{si } \lim_{n\to\infty} a_n=+\infty \text{ y } \lim_{n\to\infty} b_n=+\infty, \text{ entonces } \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=+\infty$$

Ejemplo 1

Observa cómo se aplican las propiedades anteriores para evaluar $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+5n+2}{4n^2-3n+5}$. En este caso no se puede aplicar el límite del cociente puesto que las sucesiones del numerador y del denominador no convergen. Sin embargo se pueden transformar así:

$$\frac{3n^2+5n+2}{4n^2-3n+5}=\frac{n^2\left(3+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(4-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}=\frac{3+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{4-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}$$

Se factorizó n^2 y se simplificó.

Al aplicar la propiedad e. se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+2}{4n^2-3n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{4-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(4-\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}\right)}$$

$$=\frac{\lim_{n\to\infty}3+\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}{\lim_{n\to\infty}4-\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}}=\frac{3+0+0}{4+0+0}=\frac{3}{4}$$

Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Halla los primeros cinco términos de cada sucesión.

a. $a_n = \frac{n+1}{n}$ b. $a_n = 2^{-n}$

c. $a_n = -\frac{1}{2}n$ d. $a_n = \frac{2^n}{n^2}$

e. $a_n = (-1)^n \cdot n$ f. $a_n = \frac{n+1}{n^2}$

2 Evalúa los límites de las siguientes sucesiones.

a. $a_n = \frac{n}{3n+1}$ b. $a_n = \frac{4n+1}{n+2}$

c. $a_n = \frac{4n-1}{n+2}$ d. $a_n = \frac{50n+20}{n^2-1}$

e. $a_n = \frac{5n^2+1}{n^2-2n+3}$ f. $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+2}$

g. $a_n = \frac{3^{n+1}+1}{3^n}$ h. $a_n = \frac{5^n-8}{4^n}$

i. $a_n = \frac{2^{n-1}+3^{n-1}}{3^n}$ j. $a_n = 2^{-n}$

3 Halla los términos a_{20}, a_{50} y a_{100} de cada una de las siguientes sucesiones. Usa la calculadora cuando sea necesario.

a. $a_n = \frac{2^{n-1}+2^n+2^{n+1}}{2^n}$ b. $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$

c. $a_n = \frac{3^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}{3^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}}$ d. $a_n = \frac{3n^2+5^n+2^{-n}}{2n^2}$

e. $a_n = 2 + 0{,}8^n$ f. $a_n = \frac{2n^3-n^2+1}{7n^3+n-3}$

g. $a_n = \frac{e^n}{2^n}$ h. $a_n = \sqrt{n(n+2)} - n$

Ejercitación

4 Calcula los siguientes límites.

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+5}{n^2-2}$ b. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-5n-1}{9n^2+2}$

c. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+3}{5n^2-8n+6}$ d. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+1}{n^3+3n^2}$

e. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(3+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{2n+6}{3n+1}\right)$ f. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-7n^3+5n^2-2n}{4n^3-2n^2+1}$

Razonamiento

5 Indica cuál es el error, si existe, en el cálculo de este límite.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{7n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{7n^2+\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3}{\lim\limits_{n\to\infty} 7 + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3}{7 + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{3}{7+0} = \frac{3}{7}$$

Resolución de problemas

6 Calcula los límites dadas las siguientes sucesiones.

$$a_n = \frac{3n+1}{n} \qquad b_n = \frac{n^2+1}{n^3}$$

a. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n)$ b. $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n)$

c. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}a_n + 5b_n\right)$ d. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n)$

e. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ f. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3b_n}{a_n}\right)$

7 Explica el comportamiento de la sucesión a_n. ¿Depende ese comportamiento del valor de a?

$$a_n = \frac{n^2-an+2}{n^2+an+2}$$

Evaluación del aprendizaje

¿Es posible aplicar las propiedades que se mostraron al inicio de este tema para hallar los siguientes límites? Si es así, calcúlalos.

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2-n^2+5n-7}{7n^2-n-1}$

b. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2-16n+30}{3n^2+n-144}$

	ALCALDÍA DE VILLAVICENCIO	FR-1540-GD01	
	INSTITUCIÓN EDUCATIVA CENTAUROS	Vigencia: 2014	
	CRONOGRAMA TERCER PERIODO	Documento controlado	
		PERIODO:3	

ASIGNATURA: MATEMATICAS

GRADO: ONCE

DOCENTE: ELCIRA RIVERA GRANADA

SEMANA	FECHA	PROCEDIMIENTO SEMANAL	ACTIVIDADES	FECHA DE ENTREGA
1	19 AL 23 DE JULIO	EXPLICACION DE LA ACTIVIDAD #1	PRIMERA ACTIVIDAD: PÁGINAS: 72 – 73	
2	26 AL 30 DE JULIO	ENTREGA DE LA ACTIVIDAD #1		VIERNES 30 DE JULIO
3	02 AL 06 DE AGOSTO	EXPLICACION DE LA ACTIVIDAD#2	SEGUNDA ACTIVIDAD: PÁGINAS: 74 – 75	
4	09 AL 13 DE AGOSTO	ENTREGA DE LA ACTIVIDAD #2		VIERNES 13 DE AGOSTO
5	16 AL 20 DE AGOSTO	EXPLICACION DE LA ACTIVIDAD#3	TERCERA ACTIVIDAD: PÁGINAS: 76 – 77	INFORME A PADRES DE FAMILIA
6	23 AL 27 DE AGOSTO	ENTREGA DE LA ACTIVIDAD #3		VIERNES 27 DE AGOSTO
7	30 DE AGOSTO AL 03 DE SEPTIEMBRE	EXPLICACION DE LA ACTIVIDAD#4	CUARTA ACTIVIDAD: PÁGINAS: 78 – 79	
8	06 AL 10 DE SEPTIEMBRE	ENTREGA DE LA ACTIVIDAD #4		VIERNES 11 DE SEPTIEMBRE
9	13 AL 17 DE SEPTIEMBRE	Publicación de notas a la fecha y Llamado a padres de familia.		
10	20 AL 24 DE SEPTIEMBRE	Actividades de finalización del tercer periodo y socialización de notas definitivas subidas a GESTACOL.		
CORREO	elcira@centauros.edu.co			
TEL :	3102795527			

NOTA: TODOS LOS TRABAJOS DE TODAS LAS ASIGNATURAS DEBEN IR PERSONALIZADOS CON:

NUMERO DE LA ACTIVIDAD: ____

NOMBRE DE LA TEMATICA: ____

NOMBRE COMPLETO DEL ESTUDIANTE: ______________________**GRADO:** ______________

FECHA DE REALIZACION: ____

FECHA DE ENTREGA: ____