

	ALCALDÍA DE VILLAVICENCIO	FR-1540-GD01	
	INSTITUCIÓN EDUCATIVA CENTAUROS Aprobación oficial No.0552 del 17 de septiembre del 2002 Nit. 822.002014-4 Código DANE 150001004630	Vigencia: 2020	
	APOYO A LA GESTION ACADEMICA	Documento controlado Página 1 de 1	

Docente: CARLOS EDUARDO SÁNCHEZ HUEZA		Área: MATEMÁTICAS
Grado: DÉCIMO	Sede: La Rosita	Fecha: Segundo Periodo
Estándar: Trazo de las gráficas de las funciones trigonométricas y comprensión de sus propiedades		
DBA: . Reconoce la familia de funciones logarítmicas $f(x) = \log(x)$ junto con su dominio, rango, propiedades y gráficas. V. Comprende el significado de la razón de cambio promedio de una función en un intervalo (a partir de gráficas, tablas o expresiones) y la calcula. V. Reconoce la noción razón de cambio instantáneo de una función en un punto $x=a$.		
Nombre del estudiante:		



"Examinemos una mañana de niebla la red que se ha construido durante la noche. Los hilos pegajosos están cargados de gotitas y, combándose bajo su carga, se han convertido en multitud de catenarias dispuestas en orden exquisito. Si el sol atraviesa la niebla, el conjunto se ilumina con fuegos iridiscentes y se convierte en un racimo de diamantes. El número e ha alcanzado su gloria." Jean Henry Fabre

ACTIVIDAD #1:

CONCEPTO DE FUNCIÓN, DOMINIO Y RANGO Y RECORRIDO

PAGINAS 28 – 29 – 30 – 31

Debes escribir en tu cuaderno las páginas **28 - 29**, teniendo cuidado de consignar todos los ejemplos que aparecen allí resueltos. Además, debes realizar las actividades de aprendizaje de la página **30 - 31**.

ACTIVIDAD #2:

OPERACIONES CON FUNCIONES.

PÁGINAS 32 – 33 - 35

Debes escribir en tu cuaderno las páginas **32 - 33**; analizando detenidamente su contenido. Escribe y analiza todos los ejemplos que aparecen. Además, realizar las actividades de aprendizaje de la página **35**.

ACTIVIDAD #3:

FUNCIONES INYECTIVAS Y FUNCIONES INVERSAS

PÁGINAS 38 – 39 – 40 - 41

Consigna en tu cuaderno las páginas **124 – 125 - 126**. Escribe los ejemplos que aparecen allí resueltos. Finalmente resuelve las actividades de aprendizaje de la página **126**.

ACTIVIDAD #4:

CLASIFICACION DE FUNCIONES: PARES, IMPARES, PERIODICAS, EXPONENCIAL, LOGARITMICA

PÁGINAS: 46 – 48 – 50 – 52 – 64 – 66

Consigna en tu cuaderno las páginas **46 – 48 – 50 – 52**. Escribe los ejemplos que aparecen allí resueltos. Finalmente resuelve las actividades de aprendizaje de la página **64 – 66**

1

Concepto de función. Dominio y recorrido

Saberes previos

¿De qué depende el valor que se paga por la compra de las unidades de cierto producto?

Analiza

Algunas situaciones de la vida cotidiana pueden expresarse como funciones.



- ¿Cómo puede expresarse la relación entre el consumo de gasolina de un auto y los kilómetros que recorre?

Conoce

1.1 Función real

Para el caso del consumo de gasolina de un auto se puede plantear la siguiente relación:

$$y = f(x)$$

En la cual y es la gasolina usada y x , los kilómetros recorridos e indicaría que la gasolina usada depende del número de kilómetros recorridos por el auto.

Una **función real f de variable real** es una regla que asigna a cada número x de un subconjunto de $\mathbb{R}$ un único número real y . Se escribe $y = f(x)$, y se dice que y es la imagen de x bajo f .

El subconjunto de números reales para los que la función está definida se conoce como **dominio de f** , y se denota $D(f)$. Los valores que toma la imagen forman un subconjunto denominado **imagen, rango o recorrido de f** , y se denota $R(f)$.

$$f: D(f) \longrightarrow R(f)$$

$$x \longrightarrow y = f(x)$$

El número real x que pertenece al dominio de una función f recibe el nombre de **variable independiente**. El número y asociado por f al valor x se denomina **variable dependiente**. Las funciones se pueden representar en el plano cartesiano y en él el eje X corresponde a la variable independiente y el eje Y a la dependiente.

Ejemplo 1

La función con la que a cada número real x se le asigna su cuadrado se puede representar matemáticamente en una tabla de valores (Tabla 2.1), una gráfica (Figura 2.1) o a través de la expresión algebraica $y = f(x) = x^2$, donde x es la variable independiente y y es la variable dependiente.

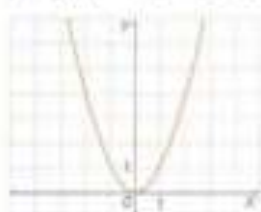


Figura 2.1

x	-	-2	-1	0	0.5	1	2	10	-
$y = x^2$	-	4	1	0	0.25	1	4	100	-

Tabla 2.1

La función anterior se puede evaluar para cualquier valor real, por lo que $D(f) = \mathbb{R}$ y, como la imagen siempre es un número no negativo, $R(f) = [0, +\infty)$.

No todas las funciones se pueden evaluar para cualquier valor real, entre éstas están las funciones radicales con índice radical par y las racionales. Para ellas, es necesario analizar el dominio teniendo en cuenta las restricciones que tienen sus estructuras algebraicas. En las primeras, al evaluar el radicando éste debe dar un número mayor o igual que cero y para las segundas, el denominador no se puede anular. Otro motivo para restringir un dominio puede ser el contexto real en que se encuentra la función.

Ejemplo 2

Observa cómo se determina el dominio de las siguientes funciones.

a. $f(x) = x^2 + 3x$

Como f puede evaluarse para cualquier número real $D(f) = \mathbb{R}$.

b. $g(x) = 2 + \sqrt{x-3}$

La función g solo se puede evaluar para valores de x tales que $x - 3 \geq 0$.
Luego, $D(g) = [3, +\infty)$.

c. $h(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 2}$

La función h no se puede evaluar en los valores de x que anulan el denominador. Por tanto, $D(h) = \mathbb{R} - \{2\}$.

1.2 Criterio de la recta vertical

Una manera para determinar si una gráfica representa una función, consiste en trazar una recta vertical (perpendicular al eje X) y verificar que corte dicha gráfica en exactamente un punto.

En la gráfica de la expresión $x^2 + y^2 = 4$, la recta vertical $x = -1$ (Figura 2.2) corta la circunferencia en dos puntos distintos; por consiguiente, la gráfica corresponde a una relación que no es función.

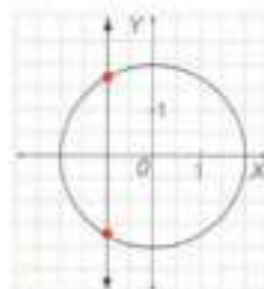


Figura 2.2

Ejemplo 3

Determina si la gráfica de la Figura 2.3 representa una función.

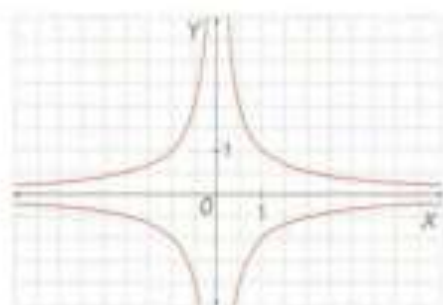


Figura 2.3

- Si se traza la recta $x = -2$, esta interseca la gráfica en dos puntos distintos. Por tanto, la gráfica no representa una función.

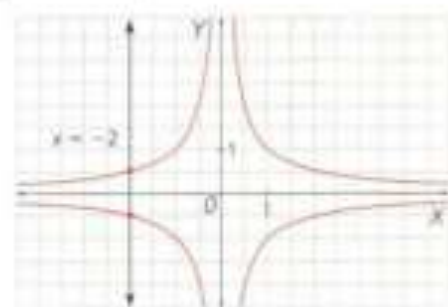


Figura 2.4

1 Concepto de función. Dominio y recorrido

100 Realiza todas las actividades en tu cuaderno

Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1 Determina si cada afirmación es verdadera o falsa.

- a. Una recta vertical corta la gráfica de una función en al menos un punto.
- b. Si se define la función $y = f(x)$ la variable dependiente es x .
- c. La Tabla 2.2 corresponde a una función:

x	-1	3	4	5	8
$f(x)$	3	7	9	9	11

Tabla 2.2

- d. Otra forma de escribir $y = x$ es $f(x) = x$.
- e. El dominio de la función $f(x) = \frac{1}{(x-1)}$ es el conjunto de todos los números reales.

Modelación

2 Dibuja una posible gráfica para la función $y = f(x)$ con las siguientes restricciones en su dominio y recorrido.

- a. $D(f) = [0, 1] \cup [5, 7]$ y $R(f) = [0, 2]$
- b. $D(f) = \mathbb{R} - [-2, 2]$ y $R(f) = \mathbb{R}$

Razonamiento

3 Halla el dominio y el recorrido de las funciones representadas en la Figura 2.5 y en la Figura 2.6.

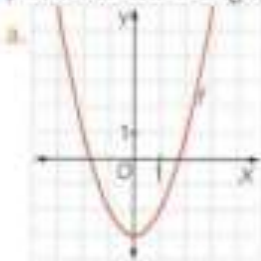


Figura 2.5

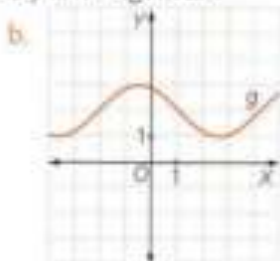


Figura 2.6

Ejercitación

4 Encuentra, si existen, los valores que no pertenecen al dominio de cada función.

- a. $f(x) = \frac{1}{x}$
- b. $f(x) = \frac{x^2}{2}$
- c. $f(x) = \frac{x-1}{2x-1}$
- d. $f(x) = \frac{x}{3x-4}$

Modelación

5 Escribe la función que representa cada enunciado.

- ▲ En cada caso, determina cuál es la variable independiente y cuál la dependiente.
 - a. El área (A) de un círculo es igual al producto del número π por el cuadrado del radio (r).
 - b. El perímetro (P) de un cuadrado es cuatro veces la longitud del lado (l).
 - c. El costo mensual de un plan de celular (C) es de \$ 41 900 fijos más 1,70 por cada segundo adicional.
 - d. El valor de y es igual a la mitad del valor de x disminuido en tres octavos.

Ejercitación

6 Obtén el dominio de las siguientes funciones.

- a. $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$
- b. $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$
- c. $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$
- d. $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+2x-3}$
- e. $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$
- f. $f(x) = \frac{x-2}{2x-4}$
- g. $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$
- h. $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{2x^2-3}$

Razonamiento

7 Halla el dominio de las siguientes funciones.

- a. $f(x) = \sqrt{x-1}(2x+3)$
- b. $f(x) = 1 + \sqrt{\frac{3-x}{5-x}}$
- c. $f(x) = \sqrt{\frac{|3-x|+2}{5-x}}$
- d. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
- e. $f(x) = 3x^2 - 5x$
- f. $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$
- g. $f(x) = \frac{4x-2}{x-1}$
- h. $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-2}}$

Modelación

8 Dibuja en tu cuaderno dos gráficas de relaciones que sean funciones y dos de relaciones que no lo sean.



Resolución de problemas

9. Un arquitecto diseña la fachada de un local construyendo un cuadrado con medio círculo montado sobre uno de sus lados, como se muestra en la Figura 2.7.



Figura 2.7

- a. Si x es la longitud del lado del cuadrado, expresa el perímetro de la fachada del local $P(x)$ como una función de x .
- b. Toma como valor aproximado de π el número decimal 3,14 y utiliza una calculadora para completar la tabla.

x	2	3	4	6	8	16
$P(x)$			24,56			

Tabla 2.3

- c. Traza el bosquejo de la gráfica de la función $P(x)$.

Resolución de problemas

10. Observa este acuario y sus dimensiones.



Figura 2.8

- a. Escribe una expresión para determinar el volumen $V(x)$ del acuario.
- b. ¿Es la expresión que escribiste en el literal a. una función? Explica.
- c. Determina el volumen del acuario para las siguientes medidas de x .

x	$V(x)$
15 cm	
25 cm	
30 cm	
40 cm	

Tabla 2.4

- d. Traza el bosquejo de la gráfica de $V(x)$.
- e. ¿Qué ocurre con el valor de $V(x)$ a medida que x aumenta?

Evaluación del aprendizaje

- i. Usa el criterio de la recta vertical para determinar cuáles de los siguientes gráficos corresponden a funciones.

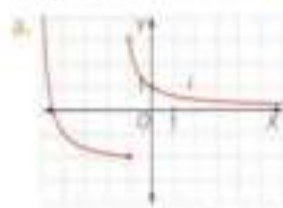


Figura 2.9

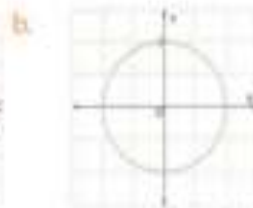


Figura 2.10

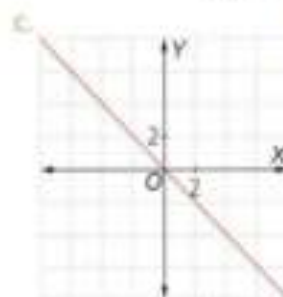


Figura 2.11

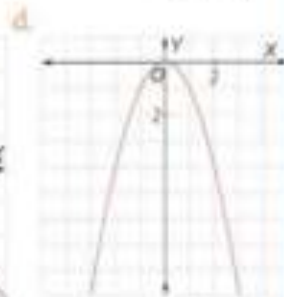


Figura 2.12

Determina el dominio y el recorrido de las funciones que identificaste en el ejercicio.

- ii. Escribe la función tal que a cada número real le hace corresponder:
- el mismo número.
 - su inverso aditivo.
 - su valor absoluto.
 - el número 3.
 - su cuadrado aumentado en tres unidades.

Educación para la sexualidad y la ciudadanía

La autoestima influye en tu forma de pensar, sentir y actuar. Una baja autoestima por lo general, trae inseguridad, depresión, ansiedad, etc. y por tanto, reduce la calidad de vida. ¿Cómo representarías mediante una función la relación entre la autoestima y la calidad de vida? Justifica.

2 Operaciones con funciones

Saberes previos

Si $f(x) = 3x$, halla $f(1)$, $f(2)$ y $f(1+2)$.

¿Es $f(1+2) = f(1) + f(2)$?

Analiza

El gasto de litros de combustible de una máquina que procesa fruta está determinado por la función $f(x) = 3x + 3$ para el caso de frutas con semilla, como el mango. Para las frutas sin semilla, como el banano, la función de consumo está dada por $g(x) = 2x + 1$.



- ¿Qué cantidad de combustible se gastará para procesar 300 toneladas de mango y 250 toneladas de banano?

Conoce

En algunos contextos de la vida cotidiana es necesario usar más de una función para describir un comportamiento determinado. Por ejemplo, para el caso de la procesadora de fruta, se tiene que el total de gasto de combustible está dado por:

$$f(x) + g(x)$$

Así, para determinar la cantidad de combustible usado, se realiza el siguiente procedimiento:

$$f(300) + f(250) = 3(300) + 3 + 2(250) + 1 = 903 + 501 = 1404$$

Lo cual indica que para procesar la fruta que se menciona en el enunciado, se requieren 1 404 litros de combustible.

Dadas dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ es posible definir la suma $s(x)$, diferencia $d(x)$ y producto $p(x)$, entre ellas.

La función suma es $s(x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$

La función diferencia es $d(x) = f(x) - g(x) = (f - g)(x)$

La función producto es $p(x) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$

El dominio de estas funciones está formado por los números que simultáneamente pertenecen a los dominios de f y g , es decir, el que está definido por la intersección de sus dominios:

$$D(f) \cap D(g)$$

Ejemplo 1

Observa cómo se determinan las funciones diferencia y producto de las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = \frac{x+2}{x-3}$, y sus correspondientes dominios.

Diferencia:

$$d(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x} - \frac{x+2}{x-3} = -\frac{x^2 + x + 3}{x^2 - 3x}$$

Producto:

$$p(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{x+2}{x-3} = \frac{x+2}{x^2 - 3x}$$

Teniendo en cuenta que $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ y $D(g) = \mathbb{R} - \{3\}$, las funciones no estarán definidas en los puntos $x = 0$ y $x = 3$ y, por lo tanto, $D(d) \cap D(p) = \mathbb{R} - \{0, 3\}$.

La función cociente $q = \frac{f}{g}$ se define para las funciones $f(x)$ y $g(x)$ como $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ con $g(x) \neq 0$.

El dominio de la función q es: $D(q) = D(f) \cap D(g) - \{x/g(x) = 0\}$

Ejemplo 2

La función cociente de las funciones $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = \frac{x+2}{x-3}$ se calcula como sigue:

$$\text{Cociente: } q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x+2}{x-3}} = \frac{x-3}{x(x+2)}$$

En el caso de la función cociente q hay que excluir del dominio los valores que anulan a g . Como $g(x) = \frac{x+2}{x-3}$ se anula en $x = -3$, se tiene que $D(q) = \mathbb{R} - \{0, -2, 3\}$.

De acuerdo con lo expuesto anteriormente puede observarse en la Figura 2.13 que los valores $x = -2$ y $x = 0$ corresponden a asíntotas de la función $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

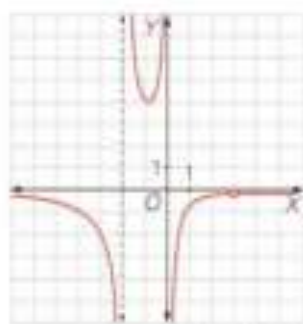


Figura 2.13

Ejemplo 3

Sean las funciones $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ y $g(x) = 3x-1$, observa cómo se hallan:

- a. $D(f+g)$ b. $D(f-g)$
 b. $D(f \cdot g)$ d. $D\left(\frac{f}{g}\right)$

Para determinar el dominio de las funciones suma, diferencia y producto se hallan los valores comunes a los dominios de $f(x)$ y $g(x)$. Como $g(x)$ es una función polinómica, su dominio es $\mathbb{R}$, pero $D(f) = [-2, 2]$, así que:

$$D(f) \cap D(g) = \mathbb{R} \cap [-2, 2] = [-2, 2]$$

Por tanto:

- a. $D(f+g) = [-2, 2]$ b. $D(f-g) = [-2, 2]$
 c. $D(f \cdot g) = [-2, 2]$
 d. Para determinar los valores para los cuales $g(x) = 0$ se resuelve la ecuación $3x-1=0$ y se encuentra que $g(x) = 0$ para $x = \frac{1}{3}$. De modo que,
 $D\left(\frac{f}{g}\right) = [-2, 2] - \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Para el caso de las funciones racionales las restricciones, en su mayoría, corresponden a las asíntotas de la función; en otros casos estas restricciones de su dominio, resultan ser agujeros que se muestran en el trazo de la gráfica.

Para las funciones radicales es importante recordar el concepto de inecuación y su respectiva solución como intervalo de los números reales.

Las funciones polinómicas $P(x)$ vienen definidas por un polinomio:

$P(x) = a_n + a_{n-1}x + a_{n-2}x^2 + a_{n-3}x^3 + \dots + a_1x^n$, donde n es un entero no negativo y cada coeficiente de x es un número real.

El dominio de cualquier función polinómica es el conjunto de los números reales.

Actividades de aprendizaje

Razonamiento

1 Sean las funciones:

$$f(x) = \frac{x-1}{x+3} \quad g(x) = \frac{2+\sqrt{x}}{x^2-4}$$

$$h(x) = \sqrt{x-1} \quad j(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{x^2+1}$$

Calcula las siguientes funciones y determina sus dominios.

a. $f+g$

b. $g-h$

c. $(f+h) \cdot j$

d. $\frac{1}{f}$

e. $\frac{g}{h}$

f. $\frac{h}{g}$

Razonamiento

2 Sean las funciones $f(x) = x - 1$ y $g(x) = \frac{x-1}{x}$.

¿a cuál de las siguientes funciones corresponde la gráfica de la Figura 2.14?

a. $s = f+g$

b. $p = f \cdot g$

c. $q = \frac{f}{g}$

d. $d = f-g$



Figura 2.14

Resolución de problemas

3 Dadas $g(x) = x^2 + 2x + 1$ y $h(x) = x + 3$, relaciona cada gráfica con la respectiva función suma, diferencia, producto y cociente.

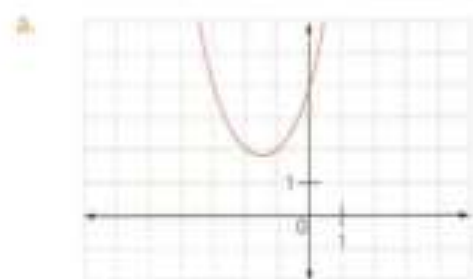


Figura 2.15

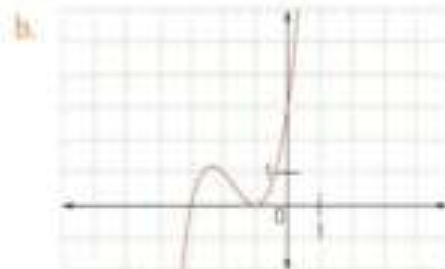


Figura 2.16

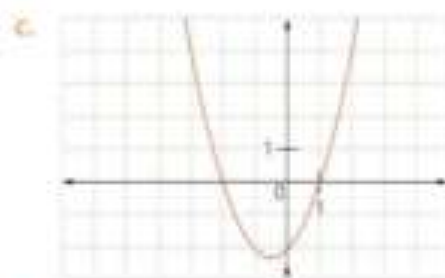


Figura 2.17

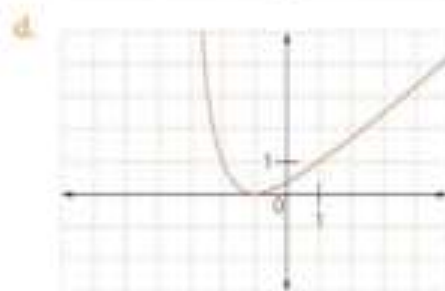


Figura 2.18

Evaluación del aprendizaje

✓ Observa las funciones:

$$f(x) = x^2 - x - 2 \quad g(x) = \sqrt{2x-4}$$

$$h(x) = \frac{1}{x^2-4} \quad t(x) = 1-x^2$$

Efectúa diez operaciones entre pares de estas y determina sus dominios.

Educación ambiental

El número de mariposas de una reserva natural ha disminuido en los últimos cinco años según la función $f(x) = \frac{9360}{x} - 800$, donde x representa el tiempo y $f(x)$ el número de mariposas. ¿Qué representa en este contexto el dominio de la función? ¿Qué crees que esté influenciando la disminución de mariposas en la reserva natural?

4 Funciones inyectivas y funciones inversas

Saberes previos

Dibuja la gráfica de una función que sea cortada por cualquier recta horizontal en solamente un punto.

Analiza

El tiempo de espera, en horas, para ser atendido en un banco entre las 9 a. m. y la 1 p. m. está dado por la función $f(x) = -x^2 + 22x - 117$, donde x representa la hora del día.



- ¿Hay horas del día en las que el tiempo de espera sea el mismo o a cada hora el tiempo de espera es diferente?

Conoce

En la Figura 2.21 se representa la función $f(x) = -x^2 + 22x - 117$.

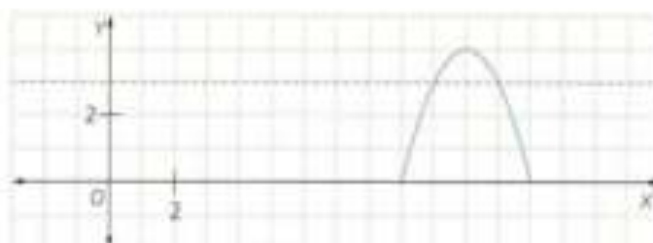


Figura 2.21

Como se observa en la gráfica, entre las 9 de la mañana y la 1 de la tarde hay varios momentos en los cuales el tiempo de espera es el mismo y no ocurre que a cada hora el tiempo de espera sea distinto.

Por ejemplo, a las 10 y a las 12, para comprobarlo se calcula $f(10)$ y $f(12)$.

$$f(10) = -(10)^2 + 22(10) - 117 \qquad f(12) = -(12)^2 + 22(12) - 117$$

$$f(10) = -100 + 220 - 117 \qquad f(12) = -144 + 264 - 117$$

$$f(10) = 3 \qquad f(12) = 3$$

Con lo cual se identifica que dos elementos diferentes del dominio tienen la misma imagen.

4.1 Función inyectiva

Una función f de D en R , es una **función inyectiva**, o **uno a uno**, si:

$a \neq b$ en D , entonces, $f(a) \neq f(b)$ en R que es equivalente a su contrarrecíproca: $f(a) = f(b)$ en R , entonces, $a = b$ en D .

Ejemplo 1

La función $f(x) = 2x - 1$ es una función inyectiva porque siendo $f(a) = f(b)$ se tiene que $2a - 1 = 2b - 1$ de donde al despejar a a en términos de b se deduce que $a = b$, lo cual indica que no es posible encontrar dos valores diferentes en el dominio de f , que es R , para los cuales se tenga un mismo valor en su recorrido.

4.2 Criterio de la recta horizontal

Una función es inyectiva si y solo si cualquier recta paralela al eje X corta su gráfica en un único punto.

Ejemplo 2

Algunas funciones no son inyectivas, como es el caso de las funciones cuadráticas, pues tienen por representación gráfica una parábola, y sin importar si abre hacia arriba o hacia abajo, existen infinitas rectas paralelas al eje X que la cortan en más de un punto.

4.3 Inversa de una función

Sea f una función inyectiva con dominio D y recorrido R . La **función inversa** de f es una función g , de dominio R y recorrido D , tal que:

$$f(g(x)) = x \text{ para cada } x \text{ en } R.$$

$$g(f(x)) = x \text{ para cada } x \text{ en } D.$$

La inversa de la función f se denota también por f^{-1} .

Ejemplo 1

En un departamento, las autoridades sanitarias lanzan una campaña de vacunación cada vez que se acerca la temporada invernal. La Tabla 2.5 muestra algunos valores de la función f que relaciona el porcentaje de vacunados con el costo de la vacunación.

Así, si se pretende vacunar al 25% de la población, la función indica que se debe disponer de un presupuesto de \$ 249 990 000, ya que $f(25) = 249\,990\,000$.

Pero se puede cambiar el punto de vista y preguntarse qué porcentaje de la población podrá ser vacunada si la partida asignada este año para la vacunación es de \$ 321 420 000.

Esta nueva función relaciona el presupuesto asignado con el porcentaje de población vacunada. Así pues, $f^{-1}(y)$ proporciona el porcentaje de la población que se podrá vacunar con un presupuesto de y pesos. Como se ve, f y f^{-1} presentan la misma información, pero expresada desde puntos de vista diferentes.

Población vacunada (%)	Costo (millones de pesos)
0	0
5	57,9
10	118,41
15	182,43
20	236,85
25	249,99
30	321,42
35	397,05

Tabla 2.5

4.4 Forma de hallar la inversa de una función

Para hallar la inversa de f se despeja x , si es posible. Después se intercambian las variables x y y .

Ejemplo 2

Se considera la función $f(x) = y = \frac{1}{x-3}$. Siempre que estén definidas las expresiones, se tiene que $x-3 = \frac{1}{y}$, por lo tanto, $x = \frac{1}{y} + 3 = \frac{1+3y}{y}$.

La inversa de la función es $x = f^{-1}(y) = \frac{1+3y}{y}$.

Como usualmente se llama x a la variable independiente, se escribe $y = \frac{1+3x}{x}$.

En la Figura 2.22 se muestra la gráfica de f y f^{-1} .

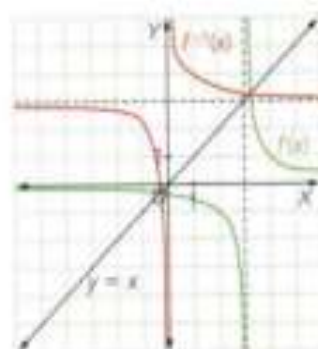


Figura 2.22

4.5 Función inversa y composición de funciones

La composición de una función f con su inversa f^{-1} cumple que

$$(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x$$

Ejemplo 5

Observa cómo se determina la inversa de la función inyectiva $f(x) = 2x + 11$:

1. Se escribe $f(x) = 2x + 11$ como $y = 2x + 11$.

2. Se despeja la variable x : $x = \frac{y - 11}{2}$.

3. Se intercambian las variables: $y = \frac{x - 11}{2}$.

$$\text{Así, } f^{-1}(x) = \frac{x - 11}{2}.$$



Figura 2.23

En la Figura 2.23, la recta en color azul corresponde a f y la roja, a su inversa. Observa que las dos rectas son simétricas con respecto a la recta $y = x$ que aparece con color verde en la gráfica.

Además, se verifica que:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x + 11) = \frac{(2x + 11) - 11}{2} = x$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x - 11}{2}\right) = 2\left(\frac{x - 11}{2}\right) + 11 = x$$

Matemáticas

Grafica una función y su inversa con GeoGebra

Para graficar la función $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ con dominio $[0, +\infty)$ y su inversa se llevan a cabo los siguientes pasos.

➤ En la barra inferior donde se lee *Entrada*, se digita la función de la forma $y = f(x)$, así:

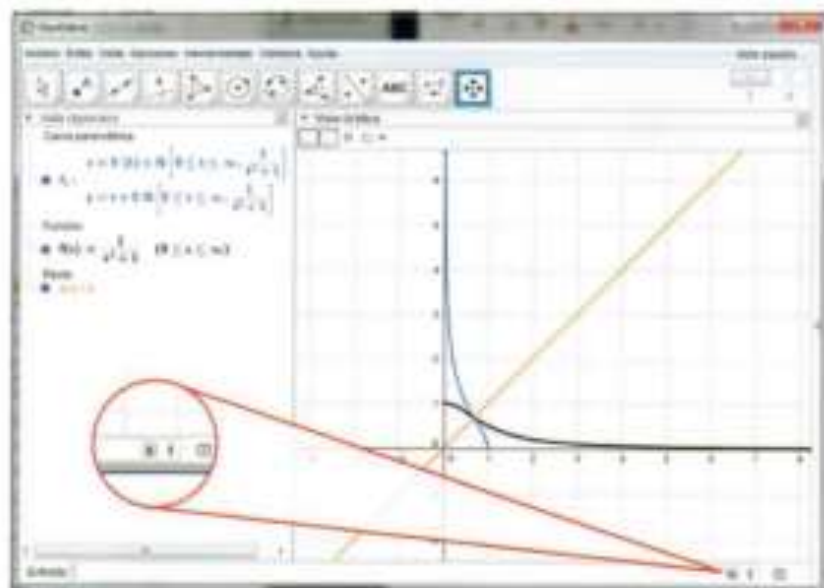
Función[1/(x^2+1);0,∞] y se presiona **Enter**.

➤ El símbolo ∞ sale al dar clic sobre el icono

➤ Para graficar $y = x$, se digita esa expresión en la barra de *Entrada*.

➤ En la barra de tareas se selecciona la opción *Simetría Axial* y se da clic en la función $f(x)$ y luego en la recta $y = x$.

➤ En el espacio de trabajo aparece de color azul la gráfica de la función inversa de $f(x)$.



Actividades de aprendizaje

Ejercitación

1. Determina cuáles de las siguientes funciones son inyectivas.

a. $f(x) = 2x - 1$ b. $f(x) = \frac{x}{x+2}$
 c. $f(x) = 1 - x^2$ d. $f(x) = 2x^2$

2. Calcula la función inversa en cada caso, cuando sea posible, y su correspondiente dominio.

a. $f(x) = \frac{2x-3}{3x+1}$ b. $t(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$
 c. $h(x) = a^x$ d. $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Razonamiento

3. Halla la inversa de cada una de las siguientes funciones. Para el caso de las funciones no inyectivas especifica dos valores distintos x_1 y x_2 tal que $f(x_1) = f(x_2)$.

a. $f(x) = -2x + 4$ b. $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$
 c. $f(x) = x^2 + 2$ d. $f(x) = 2x^2 + 3x$
 e. $f(x) = \frac{x-3}{2}$

Razonamiento

4. Encuentra la expresión y el dominio de la función inversa de:

$$f(x) = \sqrt{2x - 3}$$

¿A qué es igual $f^{-1}(3)$? ¿Existe $f^{-1}(-3)$?

Resolución de problemas

5. Dibuja en cada caso la inversa de la función. Luego determina la expresión algebraica de la inversa que dibujaste. Ten en cuenta los intervalos planteados para cada función.

a.
 $y = 3x + 1$
 $(-\infty, \infty)$

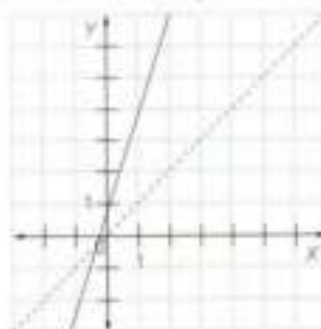


Figura 2.24

b.
 $y = 3x^2 + 2$
 Intervalo $[0, \infty)$

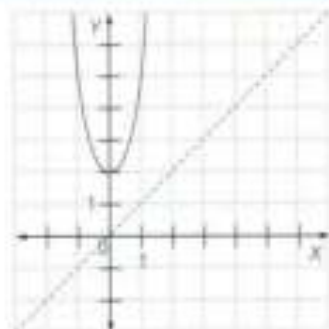


Figura 2.25

c.
 $y = x^3 - 1$
 $(-\infty, \infty)$

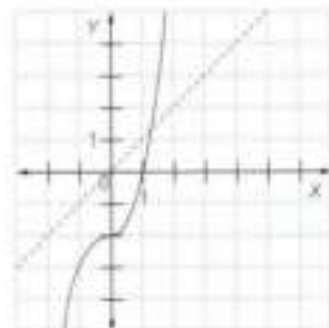


Figura 2.26

d.
 $y = \sqrt{x+1}$
 Intervalo $[-1, \infty)$

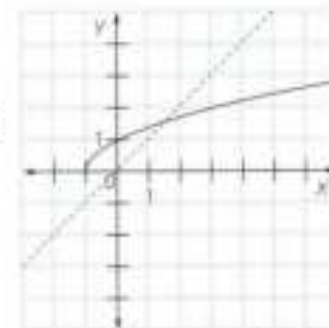


Figura 2.27

Evaluación del aprendizaje

1. Utiliza la gráfica de la función f de la Figura 2.28 y el criterio de la recta horizontal para determinar si f es inyectiva. Halla la expresión algebraica de f^{-1} y verifica que $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x$.



Figura 2.28

6

Funciones pares y funciones impares

Saberes previos

Traza la gráfica de $f(x) = x^2$, halla $f(2)$ y $f(-2)$; $f(-3)$ y $f(3)$; $f(-m)$ y $f(m)$. Compara los resultados de cada pareja y escribe una conclusión respecto a lo obtenido.

Analiza

Una de las técnicas para graficar una función se basa en observar si conserva alguna simetría, como la gráfica que se muestra en la Figura 2.44.

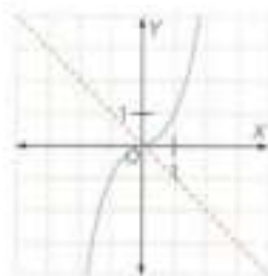


Figura 2.44

- ¿Cómo se puede analizar la simetría en esta función?

Conoce

Al observar la gráfica de la Figura 2.39, se puede ver construida la recta $y = -x$. Esta recta se comporta como un "espejo" para la función, de tal manera que si se grafican puntos en el intervalo $[0, +\infty)$, la parte de la función que está en el intervalo $(-\infty, 0)$ puede encontrarse reflejando los primeros puntos dibujados. Algunas funciones cumplen estas propiedades de verse "simétricas" con respecto a alguna recta que hace las veces de eje de simetría.

Una función es **par** si para todo x en su dominio se cumple que $f(-x) = f(x)$.

Una función es **impar** si para todo x en su dominio se cumple que $f(-x) = -f(x)$.

Gráficamente una función par es simétrica con respecto al eje Y. De igual forma, una función impar es simétrica gráficamente con respecto al origen del plano cartesiano.

Ejemplo 1

Si $f(x) = x^2 - 1$ se observa que

$$f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1,$$

Es decir que $f(-x) = f(x)$, en conclusión, f es una función par.

Si $g(x) = x^3 + x$, se tiene que

$$g(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x = -(x^3 + x) = -g(x).$$

Es decir que $g(-x) = -g(x)$, en conclusión, la función es impar.

Si $h(x) = x + 3$ se observa que

$h(-x) = -x + 3$ y que esta expresión no es ni $h(x)$ ni $-h(x)$, por lo tanto, la función no es par ni impar.

Ejemplo 2

Las funciones de las Figuras 2.45 y 2.46 son impares.

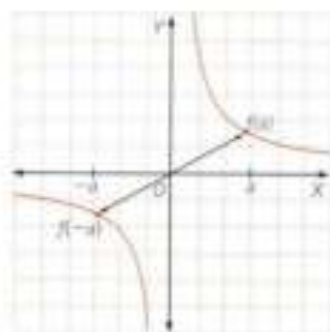


Figura 2.45

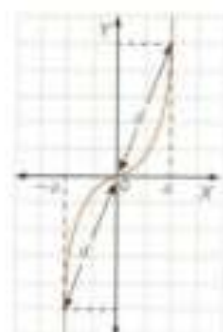


Figura 2.46

En ambas gráficas, se observa que el punto $(a, f(a))$ y el punto $(-a, f(-a))$ equidistan del origen; así que la recta $y = -x$ es un eje de simetría y por lo tanto, las funciones son impares.

7 Funciones periódicas

Saberes previos

Supón que te subes a una rueda panorámica de un parque de atracciones. Explica cómo varía tu posición si das cinco vueltas completas. Traza una gráfica que muestre tu posición desde el comienzo hasta que acabes de dar las cinco vueltas.

Analiza

El electrocardiograma (ECG) es una prueba diagnóstica que evalúa el ritmo y la función cardíaca a través de un registro de la actividad eléctrica del corazón.



Figura 2.51

- ¿Cómo se interpretan las imágenes en un electrocardiograma?

Conoce

Hay situaciones de la vida cotidiana que funcionan teniendo en cuenta diferentes periodos. Por ejemplo, los latidos del corazón llevan un ritmo constante que les permite ser medidos e interpretados en un electrocardiograma. Por ejemplo, si se interpreta la imagen de la Figura 2.51 se identifica que cada cierto periodo de tiempo se da un latido, que son los picos más pronunciados en ella. Este tipo de comportamientos corresponden a las denominadas funciones periódicas.

Una función f de variable real es **periódica**, de periodo T , si cumple dos condiciones:

- $x + T$ está en el dominio de f y
- $f(x + T) = f(x)$.

Si se conoce la gráfica de la función en un intervalo de amplitud T , se puede construir toda la gráfica trasladando la parte conocida tanto a la derecha como a la izquierda por todo el dominio de f .

Ejemplo 1

La gráfica de la Figura 2.52 corresponde a una función que se repite en intervalos de 4 unidades, por lo que el periodo es $T = 4$.

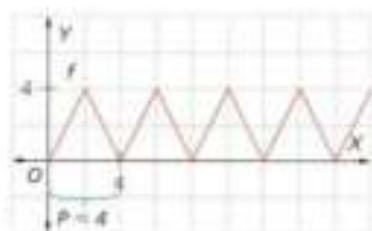


Figura 2.52

Ejemplo 2

La gráfica de la Figura 2.53 no parece tener un periodo definido, pero al representar más valores de su dominio es evidente que se trata de una función periódica (Figura 2.54).



Figura 2.53



Figura 2.54

8

Función exponencial

Saberes previos

Observa la secuencia y escribe los siguientes tres términos:

4, 16, 64,...

Analiza

Cierto banco paga un interés compuesto, expresado como $f(x) = (1,5)^x$, a las cuentas ordinarias, por cada \$ 1 000 de ahorro que permanece en la cuenta durante x meses.



- ¿Cuál es el comportamiento del interés compuesto en este tipo de cuenta durante la permanencia de cada \$ 1 000?

Conoce

La Figura 2.60 muestra la gráfica de la función $f(x) = (1,5)^x$ mientras que la Tabla 2.8 muestra su comportamiento. En este caso, al ser x el número de meses, toma valores mayores o iguales que 0.

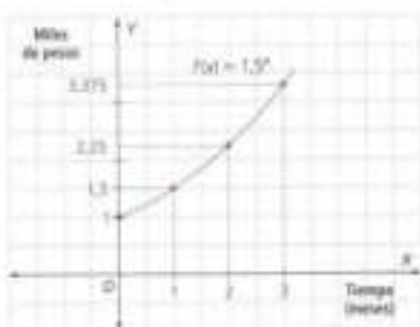


Figura 2.60

Características de $f(x) = (1,5)^x$

Dominio: $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Rango: $[1, \infty)$

Pasa por $(0, 1)$

No corta el eje X

Es creciente

Tabla 2.8

En general, la gráfica de la función $f(x) = a^x$ depende del valor de a :

- Si a es mayor que 1, la gráfica de la función es de la forma:

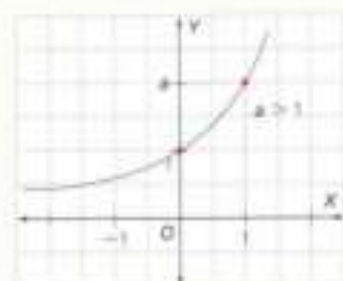


Figura 2.61

La función es creciente en todo su dominio.

- Si a está entre 0 y 1, la gráfica de la función es de la forma:

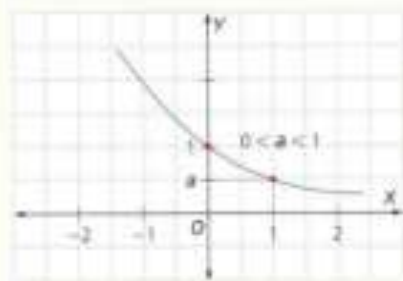


Figura 2.62

La función es decreciente en todo su dominio.

Un caso particular de función exponencial es cuando la base es el número irracional $e = 2,718281828459...$ que aparece en múltiples investigaciones.

La Figura 2.63 muestra la gráfica de la función exponencial natural $f(x) = e^x$ y la Tabla 2.9 resume sus características.

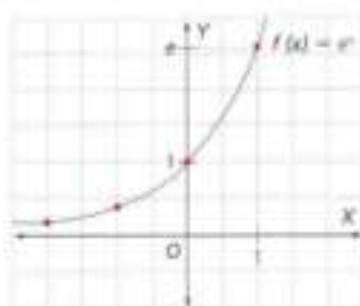


Figura 2.63

Características de $f(x) = e^x$

Dominio: $\mathbb{R}$

Rango: $\mathbb{R}^+$

Es creciente en todo su dominio ($e > 1$)

Pasa por $(0, 1)$

Nunca corta el eje X

Tabla 2.9

9

Función logarítmica

Saberes previos

¿Cuántas veces debes multiplicar a 3 por sí mismo para obtener como producto 243?

Analiza

En una cooperativa se ha calculado que la función que establece el tiempo que debe permanecer ahorrado un capital, para que cada \$ 1 000 adquieran cierto valor final, es: $f(x) = \log_{10} x$ donde $f(x)$ es el tiempo en años y x es el monto final deseado.



- ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que \$ 1 000 se conviertan en \$10 000?

Conoce

En este caso, la función $f(x) = \log_a x$ es una **función logarítmica** cuya base es 10.

En general, una función logarítmica con base a asigna a cada número real x el exponente y al que debe ser elevado a para obtener x , es decir, si $y = \log_a x$, entonces $a^y = x$.

Por ejemplo, si $y = \log_2 8$, entonces $y = 3$, porque $2^3 = 8$.

De esta manera, el tiempo de depósito para que cada \$ 1 000 se conviertan en \$ 10 000 es: $f(10\,000) = \log_{10} 10\,000 = 4$ años.

En la gráfica de la función logarítmica $f(x) = \log_a x$ se presentan dos casos:

- Si $a > 1$, la función es creciente.

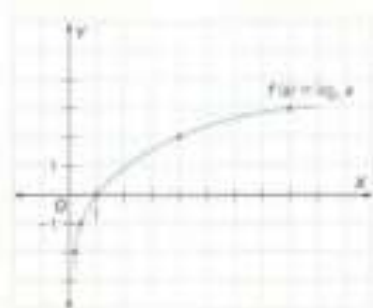


Figura 2.14b

x	0.25	0.5	1	4	8
$f(x) = \log_a x$	-2	-1	0	2	3

Tabla 2.14

- Si $0 < a < 1$, la función es decreciente.

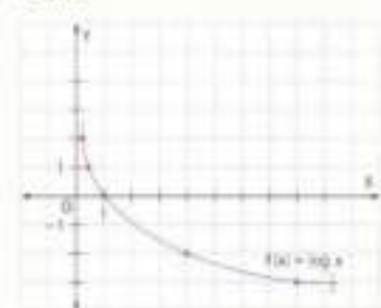


Figura 2.14a

x	0.25	0.5	1	4	8
$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$	2	1	0	-2	-3

Tabla 2.15

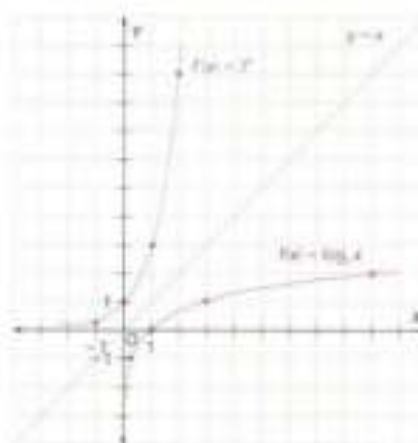


Figura 2.71

Se le llama **función logaritmo natural** que se escribe como $\ln(x)$ al logaritmo que tiene de base el número e . Su gráfica se muestra en la Figura 2.70.

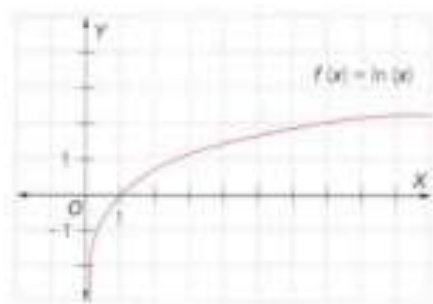


Figura 2.70

Algunas propiedades de la función logaritmo natural

$$\begin{aligned}\ln 1 &= 0 \\ \ln e &= 1 \\ \ln e^x &= x \\ \ln(x \cdot y) &= \ln(x) + \ln(y) \\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) &= \ln(x) - \ln(y) \\ \ln x^n &= n \cdot \ln(x)\end{aligned}$$

Tabla 2.16

La **función logarítmica con base a** es la función inversa de la función exponencial con base a , de modo que la gráfica de $f(x) = \log_a x$ se obtiene reflejando la gráfica de $f(x) = a^x$ con respecto a la recta $y = x$. Por ejemplo, las funciones $f(x) = \log_2 x$ y $f(x) = 2^x$ son inversas como se ve en la Figura 2.71.

Concepto de función

Comunicación

- 1 Determina si las siguientes gráficas describen funciones.

a.

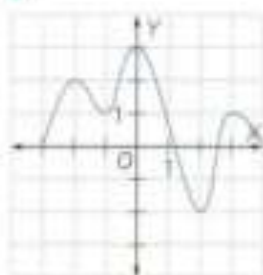


Figura 2.186

b.

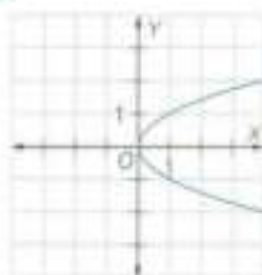


Figura 2.187

- 2 Halla el dominio y el recorrido de las siguientes funciones.

a.

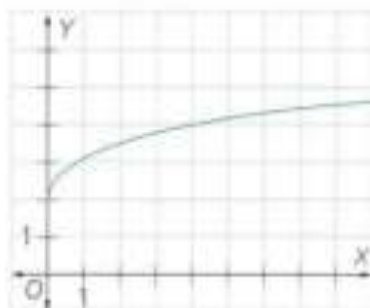


Figura 2.188

b.

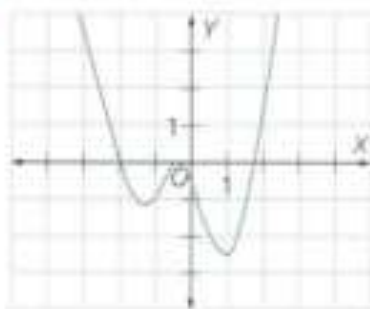


Figura 2.189

Operaciones con funciones

Ejercitación

- 3 Halla las operaciones indicadas si $f(x) = x^2 + 2x$ y $g(x) = 3x^2 - x^3$.

- a. $f(x) + g(x)$ b. $f(x) + [g(x) - f(x)]$
c. $f(x) \cdot g(x)$ d. $[f(x) + g(x)] + g(x)$

- 4 Dadas las funciones

$f(x) = \frac{1}{x-2}$ y $g(x) = x^2 - 4$, halla el dominio y el recorrido de cada función.

- a. $f(x) + g(x)$ b. $g(x) - f(x)$
c. $f(x) \cdot g(x)$ d. $f(x) \div g(x)$

Composición de funciones

Ejercitación

- 5 Representa las tres funciones y compara los dominios y los recorridos de cada una.

a. $f(x) = x^2 + x$
 $g(x) = 3x + 2x^2$
 $f(x) \circ g(x)$

b. $h(x) = \sqrt{x+2}$
 $k(x) = 2x^2 + 2$
 $k(x) \circ h(x)$

- 6 Evalúa, si es posible, los valores en las funciones.

$g[f(-2)]$, $g[f(-3)]$, $g[f(2)]$ y $g[f(5)]$
 $f(x) = \frac{1}{x+2}$ y $g(x) = \sqrt{2x^2 - 4}$

Funciones inyectivas y funciones inversas

Razonamiento

- 7 Representa cada una de las funciones y determina si son inyectivas. Luego escribe los intervalos en donde son crecientes y decrecientes.

a. $f(x) = 3x + 5$ b. $f(x) = 3x + 2$
c. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ d. $f(x) = x^2 - 2x^3$

- 8 Dada $f(x) = \frac{2x+2}{5}$.

- a. Halla su inversa.
b. Representa las dos funciones.
c. Realiza la composición entre las dos funciones.

Concepto de función. Dominio y recorrido

Razonamiento

1. Escribe falso (F) o verdadero (V) de acuerdo con la validez de cada una de las siguientes proposiciones.
 - a. El número real x perteneciente al dominio de una función f , recibe el nombre de variable dependiente. ()
 - b. El dominio de la función $f(x) = x^2 + x$ es el conjunto de todos los números reales. ()
 - c. El dominio de la función $f(x) = \frac{2}{x}$ es el conjunto de todos los números reales mayores que 0. ()
 - d. El recorrido de la función $g(x) = \cos x$ es el mismo de la función $f(x) = \sin x$. ()
 - e. El dominio de $f(x) = x^3 + x^2 + 1$ es el conjunto de todos los números reales positivos. ()

Razonamiento

2. Relaciona cada función con su rango.
 - a. $f(x) = x^2 + 1$ [1, ∞)
 - b. $f(x) = x^2 - 4$ [0, 1) $\cup$ (1, ∞)
 - c. $f(x) = 9 - x^2$ [1, ∞)
 - d. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ [$-\infty$, 9]
 - e. $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$ [-4, ∞)

Modelación

3. La tarifa de un taxi en una ciudad es de \$200 por bajada de bandera y por cada kilómetro recorrido \$80.
 - a. Haz una tabla que exprese el precio del viaje según los kilómetros que se recorran.
 - b. Encuentra la función que relaciona los kilómetros recorridos (x) y el precio del viaje (y).
 - c. Representa dicha función gráficamente.
 - d. ¿Cuál es el dominio de la función?
 - e. ¿Cuál es el rango de la función?

Resolución de problemas

4. Decide cuál de las siguientes gráficas corresponde a una función. Determina su dominio y su recorrido.



Figura 2.102



Figura 2.103



Figura 2.104



Figura 2.105

Operaciones con funciones

Comunicación

5. Asocia cada función con su gráfica.
 - a. $y = -3x + 5$
 - b. $y = (x + 2)^2$
 - c. $y = 3x^2$
 - d. $y = -4x$
 - e. $y = -\frac{1}{x-4}$



Figura 2.106



Figura 2.107

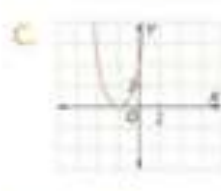


Figura 2.108



Figura 2.109

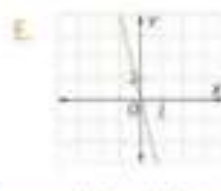


Figura 2.110

Composición de funciones

Ejercitación

6. Dadas $f(x) = 2x - 3$ y $g(x) = \frac{x}{5}$, halla:
 - a. $f(g(0))$
 - b. $f(g(-2))$
 - c. $g(f(5))$
 - d. $f(g(x))$